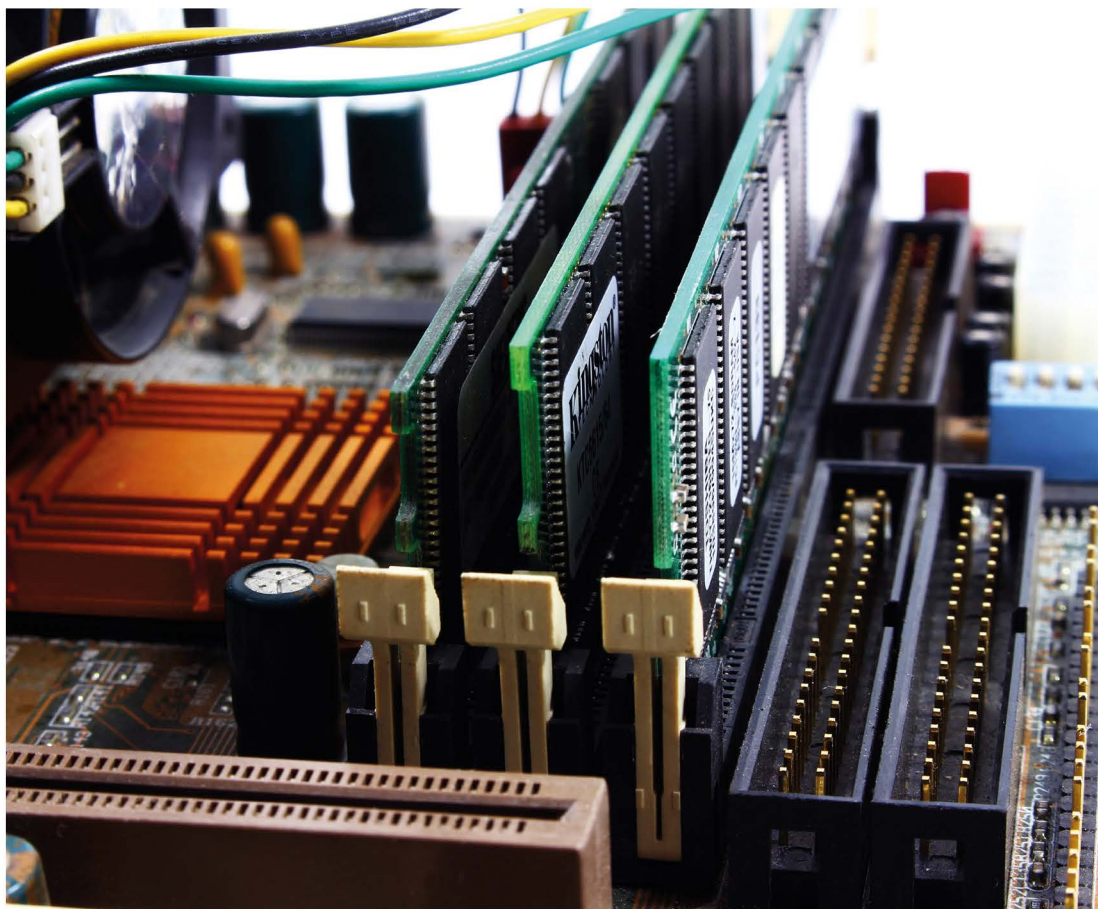


# GUÍA PRÁCTICA PARA EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA DE ROBÓTICA - SEGUNDA PARTE



COLECCIÓN MATERIAL DOCENTE INGENIERÍAS



Saúl Eduardo Ruiz Sarzosa.  
Docente del programa de  
Ingeniería Mecatrónica de  
Unicomfauca en la ciudad  
de Popayán. Ingeniero en  
Automática Industrial y Magister  
en Automática Industrial de  
la Universidad del Cauca.





# GUÍA PRÁCTICA PARA EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA DE ROBÓTICA – SEGUNDA PARTE

Saúl Eduardo Ruiz Sarzosa



Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia

Ruiz Sarzosa, Saúl Eduardo Ruiz.

Guía práctica para el proceso de aprendizaje de la asignatura robótica – segunda parte /

Saúl Eduardo Ruiz Sarzosa. ----1ª ed.--- Popayán: Sello editorial Unicomfacaucá, 2022.

p. 139

Contiene datos de los autores.

ISBN (Digital): 978-628-95397-8-3

Guía práctica para el proceso de aprendizaje de la asignatura robótica – segunda parte

© Corporación Universitaria Comfacaucá – Unicomfacaucá

© Autor: Saúl Eduardo Ruiz Sarzosa

Primera edición en español

Sello Editorial Unicomfacaucá, septiembre de 2022

ISBN Digital: 978-628-95397-8-3

Diseño Editorial: Sello Editorial Unicomfacaucá – Corporación

Universitaria Comfacaucá - Unicomfacaucá

Corrección de Estilo: La Peregrina Estudio – larailustracion@gmail.com

Diagramación: La Peregrina Estudio – larailustracion@gmail.com

Editor General de Publicaciones: Julio Eduardo Mejía Manzano

Sello Editorial Unicomfacaucá

Calle 4ta # 8-30 Centro Histórico

Popayán, Colombia

Teléfono: 602 8386000 Ext. 118

[www.unicomfacaucá.edu.co/investigacion/sello-editorial/](http://www.unicomfacaucá.edu.co/investigacion/sello-editorial/)



Licencia Atribución-NoComercial-SinDerivadas 2.5 Colombia (CC BY-NC-ND 2.5 CO)

# Contenido

|                                                                               |           |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Resumen</b>                                                                | <b>9</b>  |
| <b>Introducción</b>                                                           | <b>10</b> |
| <b>Fundamentación teórica</b>                                                 | <b>11</b> |
| <b>Fundamentación metodológica</b>                                            | <b>13</b> |
| · Estrategia metodológica                                                     | 13        |
| <b>Fundamentación curricular y didáctica</b>                                  | <b>18</b> |
| <b>Capítulo 1: El modelo dinámico</b>                                         | <b>21</b> |
| · Parámetros dinámicos                                                        | 22        |
| · Ejercicio de evaluación 1.1. Cálculo de momentos de inercia                 | 23        |
| · Solución ejercicio de evaluación 1.1                                        | 24        |
| · Ejercicio práctico 1.1. Cálculo de momentos de inercia                      | 28        |
| · Parámetros de base                                                          | 28        |
| · Ejercicio de evaluación 1.2. Cálculo de parámetros de base                  | 31        |
| · Solución ejercicio de evaluación 1.2.                                       | 33        |
| · Ejercicio práctico 1.2. Cálculo de parámetros de base                       | 39        |
| <b>Capítulo 2: Método de Lagrange</b>                                         | <b>41</b> |
| · Energía cinética                                                            | 41        |
| · Ejercicio de evaluación 2.1.1. Cálculo de velocidades rotacionales          | 42        |
| · Solución ejercicio de evaluación 2.1.1.                                     | 42        |
| · Ejercicio práctico 2.1.1. Cálculo de velocidades rotacionales               | 47        |
| · Ejercicio de evaluación 2.1.2. Cálculo de velocidades traslacionales        | 47        |
| · Solución ejercicio de evaluación 2.1.2.                                     | 47        |
| · Ejercicio práctico 2.1.2. Cálculo de velocidades traslacionales             | 52        |
| · Ejercicio de evaluación 2.1.3. Cálculo de energía cinética                  | 52        |
| · Solución ejercicio de evaluación 2.1.3.                                     | 52        |
| · Ejercicio práctico 2.1.3. Cálculo de Energía cinética                       | 61        |
| · Construcción de la matriz de inercia                                        | 61        |
| · Ejercicio de evaluación 2.2. Construcción de la matriz de inercia           | 62        |
| · Solución ejercicio de evaluación 2.2.                                       | 62        |
| · Ejercicio práctico 2.2. Construcción de la matriz de inercia                | 64        |
| · Energía potencial                                                           | 64        |
| · Ejercicio de evaluación 2.3. Cálculo de energía potencial                   | 64        |
| · Solución ejercicio de evaluación 2.3                                        | 64        |
| · Ejercicio práctico 2.3. Cálculo de energía potencial                        | 68        |
| · Vector de fuerzas de gravedad                                               | 68        |
| · Ejercicio de evaluación 2.4. Construcción del vector de fuerzas de gravedad | 69        |
| · Solución ejercicio de evaluación 2.4.                                       | 69        |
| · Ejercicio práctico 2.4. Construcción del vector de fuerzas de gravedad      | 70        |

|                                                                                            |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Capítulo 3: Control y simulación de robots</b>                                          | <b>71</b>  |
| · Generación de trayectorias y consignas articulares                                       | 71         |
| · Consigna articular                                                                       | 71         |
| · Ejercicio de evaluación 3.1.1. Construcción de consigna articular                        | 71         |
| · Solución ejercicio de evaluación 3.1.1.                                                  | 71         |
| · Ejercicio práctico 3.1.1. Construcción de consigna articular                             | 74         |
| · Consigna cartesiana                                                                      | 74         |
| · Ejercicio de evaluación 3.1.2. Construcción de consigna cartesiana                       | 74         |
| · Solución ejercicio de evaluación 3.1.2.                                                  | 74         |
| · Ejercicio práctico 3.1.2. Construcción de consigna cartesiana                            | 76         |
| · Control PID                                                                              | 76         |
| · Sintonización del controlador PID                                                        | 77         |
| · Ejercicio de evaluación 3.2. Construcción del sistema robótico con control PID           | 77         |
| · Solución ejercicio de evaluación 3.2.                                                    | 77         |
| · Ejercicio práctico 3.2. Construcción de sistema robótico con control PID                 | 87         |
| · Control por par calculado (CTC)                                                          | 87         |
| · Ejercicio de evaluación 3.3. Construcción del sistema robótico con control CTC articular | 87         |
| · Solución ejercicio de evaluación 3.3.                                                    | 87         |
| · Ejercicio práctico 3.3. Construcción de sistema robótico con control CTC articular       | 91         |
| <b>Capítulo 4: Entorno virtual para pruebas</b>                                            | <b>92</b>  |
| · Introducción a V-Realm Builder                                                           | 92         |
| · Ejercicio de evaluación 4.1. Construcción de robot en V-Realm Builder                    | 96         |
| · Solución ejercicio de evaluación 4.1.                                                    | 96         |
| · Ejercicio práctico 4.1. Construcción de robot en V-Realm Builder                         | 101        |
| · Introducción a Simulink 3D Animation                                                     | 101        |
| · Ejercicio de evaluación 4.2. Carga de modelo en VR Sink                                  | 102        |
| · Solución ejercicio de evaluación 4.2.                                                    | 102        |
| · Ejercicio práctico 4.2. Carga de modelos en VR Sink                                      | 107        |
| <b>Glosario</b>                                                                            | <b>108</b> |
| <b>Referencias</b>                                                                         | <b>109</b> |
| <b>Anexo 1</b>                                                                             | <b>111</b> |
| <b>Anexo 2</b>                                                                             | <b>129</b> |

## RESUMEN

El desarrollo de la presente guía práctica para el proceso de aprendizaje complementario de la asignatura de Robótica aborda los conceptos vistos en la primera guía de Ruiz y Burbano (2019) sobre el modelado geométrico y cinemático de robots industriales tipo serie, con el objetivo de modelar dinámicamente los ejemplos de estudio iniciales y realizar pruebas de control para el seguimiento de trayectorias de tipo articular y cartesianas. Lo anterior, haciendo uso de la integración de recursos de información y comunicación, en relación con procesos de mediación pedagógica y tecnológica. En este sentido se obtiene una estructura del recurso didáctico construida de la siguiente manera: 1) *Elementos teóricos*, estos deben brindar la información necesaria para iniciar la construcción del modelo dinámico de robots industriales. 2) Unir la experiencia práctica (construir la función de transferencia de un robot industrial de tipo serial para realizar simulaciones y probar diferentes tipos de control como el proporcional, integral y derivativo [pid] y el control por par calculado [ctc], en el software computacional Matlab®-Simulink) que permita validar los conceptos teóricos de la robótica 3) La evaluación, determinada en procesos sincrónicos como ejercicios en clase y asincrónicos como talleres y simulaciones en Matlab, evidenciando los procesos de retroalimentación en el aprendizaje del tema de Robótica. 4) *Componentes de trabajo colaborativo*, como el tema de la dinámica de robots.

**Palabras clave:** control ctc; control pid; método de LaGrange; modelo dinámico; robot industrial.

## INTRODUCCIÓN

La presente guía se desarrolla para estudiantes de Ingeniería y describe el proceso de aprendizaje mediado por el uso de tecnologías emergentes como el desarrollo de simulaciones en software computacionales como Matlab®-Simulink, para ejemplificar conocimientos, prácticas, didácticas y métodos utilizados por autores como: Khalil y Dombre, (2002), Siciliano y Khatib, (2008) y Vivas, (2010) relacionados con el tema de modelado de recursos como “Robots industriales” de tipo serie.

Parte del proceso de formación de ingenieros mecatrónicos es la asignatura de Robótica, del programa de Ingeniería Mecatrónica en la Corporación Universitaria Comfacaucua - Unicomfacaucua, la cual es impartida en dos semestres y se estructura en dos componentes. La primera parte comprende: “Modelado geométrico y cinemático de un robot tipo serie” abordada en la guía uno (Ruiz y Burbano, 2019) y la segunda parte se fundamenta en el principio del “Modelo dinámico”, necesario para la simulación del sistema robótico en términos de control y seguimiento de consignas, conceptos y temáticas abordadas en esta guía.

Este documento se estructura en dos componentes. La primera parte, “La necesidad de conceptos en relación con la práctica”, en la que se estudian mediáticas desde la integración de los modelos geométrico y cinemático, con el modelo dinámico para un “Robot tipo serie de cuatro grados de libertad”, y pretende que el estudiante pueda *analizar y comprender* con una forma lúdica ejercicios y dinámicas de aprendizaje respecto a procesos de estrategia de: aprendizaje inteligente, colaborativo y cooperativo, en relación con actividades que refuercen la praxis del concepto de Robot. Finalmente, se espera que con la utilización de actividades prácticas, que refieren ejemplos y ejercicios propuestos en tiempos sincrónicos de clase y asincrónicos fuera del aula de clase, el estudiante pueda incentivar y organizar sus habilidades de pensamiento crítico reflexivo como: interpretación, inferencia, evaluación, análisis y explicación para adaptar y comprender los conceptos teórico-prácticos de la asignatura de Robótica, en su totalidad.

## FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Las tecnologías del aprendizaje y comunicación juegan un rol determinante en la formación de profesionales de ingeniería mecatrónica, son esenciales para lograr la transferencia del conocimiento tecnológico en la sociedad, permitiendo una apropiación de habilidades bajo una adaptación de análisis, comprensión y reflexión para abordar el desarrollo de competencias en un entorno de pedagogías emergentes cumpliendo con los retos enmarcados en procesos de investigación aplicada al conocimiento de la robótica. En este sentido, se podrán evidenciar las ventajas de utilizar softwares como Matlab®-Simulink para el proceso de formación de los estudiantes con el objetivo de lograr un aprendizaje interactivo, con el que puedan afianzar los conocimientos a través de pruebas y prácticas computarizadas. Estos factores favorecen la participación directa de los procesos de retroalimentación, descubrimiento y aprovechamiento de los contenidos para aprender nuevas temáticas, realzando que estos recursos resultan ser llamativos para los estudiantes y fortaleciendo el factor motivacional, un elemento del éxito educativo.

Durante el proceso, diseño e implantación de la guía de aprendizaje se identificaron cuatro factores teniendo en cuenta los estados de transmisión de información: 1) sociedad del conocimiento, 2) sociedad de la información, 3) sociedad red y 4) sociedad del aprendizaje. En ese contexto, toma importancia el proceso transformador de los contextos socioculturales y económicos, siendo pertinente observar cómo han permeado las primeras tres sociedades el proceso de transmisión y transformación de los datos.

De esta forma, los procesos educativos por parte de las instituciones deben crear procesos sistémicos, reflexivos, críticos. Siguiendo a Zubiría, deben desarrollar procesos de pensamiento en las personas al igual que promover la comprensión básica del mundo (Zubiría, citado en Terrazas y Silvia, 2013), con la facilidad de procesar y de difundir información. Es, entonces, necesario:

Formar para construir conocimiento y responder a los retos de la sociedad. Se trata de comprender y reconocer que el recurso más valioso de las organizaciones es el conocimiento. Esta apropiación del conocimiento y la generación del mismo no será posible si no se desarrolla la investigación; las organizaciones y sociedades deben adoptar políticas y estrategias que permitan avanzar en procesos investigativos de desarrollo; se trata de la creación de un nuevo contexto científico - tecnológico que genere alta competitividad (Terrazas y Silvia, 2013, p. 156).

Principalmente en esta sociedad actual, los procesos educativos no sólo deben limitarse a transmitir el conocimiento a base del “estar informado”, es decir, considerar todo lo que conlleva la transmisión de información. Estos procesos educativos deben modificar su accionar, hacia un cambio de mentalidad y actitud frente a las nuevas circunstancias que se vayan presentando, igualmente contribuir de manera innovadora a cualquier escenario (Terrazas y Silvia, 2013, p. 158).

La educación, en todos sus ámbitos y contextos está en el desafío de apoyar la formación de individuos competentes, que sepan integrar las tres dimensiones del saber:

1. Saber conocer: en el entendido de saber manejar procesos cognoscitivos, integrar y sistematizar conocimientos, teorías, constructos y de ese modo poder administrar la información. Es importante que, en esta dimensión, se promueva el estudio y generación de teorías en conjunción con la investigación 2. Saber hacer: que significa enfrentarse y manejar procesos, métodos y procedimientos, de tal forma que se manifiesten en estrategias de aplicación al contexto y desarrollo de la sociedad, así mismo debe ser capaz de instruir y formalizar la dimensión de la competencia en este campo de aplicación y 3. Saber ser: dimensión asociada a la formación en actitudes y valores; actitudes en el sentido de generar disposiciones de ánimo proactivas, no reactivas, que permitan crear en las personas visiones transformadoras de bienestar y calidad de vida para el ser humano; valores en el sentido de propiciar principios espirituales y de ética que promuevan el accionar de servicio y de amor del ser humano hacia Dios, la sociedad y su entorno (Terrazas y Silva, 2013, pp. 158-159).

Sin duda alguna el sujeto debe constituir una formación integral, que incluya el componente ético y humano y también intelectual; es por eso que habilidades como la interpretación son de gran relevancia, porque de esto depende la capacidad de interpretar textos, reconocer la realidad y el contexto que lo rodea.

Lo anterior plantea una serie de atributos que

apuntan a caracterizar un sistema educacional transformador y significativo, que pretenda un campo de acción más beneficioso para el hombre, en el sentido de actuar en el contexto mundano, con más sabiduría. Todo este planteamiento, para continuar con una perspectiva integral, no puede prescindir de la unidad y diversidad, en el sentido de que los seres humanos deben ser capaces de actuar conjuntamente y además respetar también las múltiples manifestaciones de pensamiento y capacidad que se dan en cada uno de nosotros (Terrazas y Silva, 2013, p. 162).

Entrando en materia, la robótica cumple un papel trascendental en el mundo contemporáneo evocando desde sus inicios el principal objetivo de servir al ser humano, hoy en día, realizando trabajos de alto riesgo o actividades repetitivas que afectan la salud de los trabajadores en la industria y en general, pero no solo a nivel industrial, ya que actualmente, la robótica cumple un papel supremamente importante en diversas áreas del conocimiento, asimismo, en infinidad de aplicaciones que van desde la robótica médica, aeroespacial, entretenimiento, educación, entre otras, sin embargo, es la robótica industrial la que ha impulsado desde sus inicios toda la gama de aplicaciones que existen actualmente, por lo tanto, es para el proceso de formación del Ingeniero en Mecatrónica de la Corporación Universitaria Comfacaucá – Unicomfacaucá de vital importancia estudiar y apropiarse las bases de la robótica industrial, los modelos y procedimientos que llevan a la simulación y posterior implementación de robots tipo serie.

## FUNDAMENTACIÓN METODOLÓGICA

El diseño metodológico de la guía se orienta hacia la formación de las habilidades cognitivas, comunicativas y tecnológicas en los ingenieros mecatrónicos de la Corporación Universitaria Comfacaucá - Unicomfacaucá por medio del desarrollo de los sistemas de control robóticos mediante la herramienta software Matlab®-Simulink. Se fundamenta desde las mediaciones con respecto a la aplicación del B-Learning que se asocia a una teoría de aprendizaje inteligente concebido desde cinco dimensiones: 1.) productividad individual, 2) interacción con otros individuos, 3) objetos de estudio, 4) labores educativas, y 5) acervo cultural, científico y tecnológico (Galvis-Panqueva, 2008). Todas ellas permiten la transformación pedagógica fomentando el desarrollo de una ruta de aprendizaje al interior del Curso de Robótica orientada desde las tecnologías del aprendizaje y conocimiento (tac). A continuación, se genera una descripción de la estrategia metodológica.

### Estrategia metodológica

Es un conjunto de actividades, didácticas y recursos de información y comunicación, para facilitar un aprendizaje situado (AS), que integre los referentes y principios pedagógicos de la formación orientada al desarrollo de competencias. Lo anterior favorece a los estudiantes del Programa de Ingeniería Mecatrónica a lograr un desarrollo cognitivo en la adquisición, interpretación y procesamiento de la información para la utilización y generación de nuevos aprendizajes al establecer un significado en el saber de la robótica.

En este sentido, es importante considerar el proceso de la didáctica desde seis elementos fundamentales como lo son: el alumno, los objetivos, el profesor, la materia, las técnicas de enseñanza, y el contexto (Nérici, 1973). Así, las técnicas de enseñanza abarcan las estrategias didácticas, conocidas como los procedimientos donde se organizan una serie de acciones “para construir y lograr metas previstas e imprevistas en el proceso enseñanza y aprendizaje” (Feo, 2010, p. 222). Estas estrategias generalmente se dividen en estrategias de enseñanza y estrategias de aprendizaje. No obstante, Feo (2009) las clasifica en: estrategias de enseñanza; estrategias instruccionales; estrategias de aprendizaje; y estrategias de evaluación. Las estrategias instruccionales se caracterizan por una interrelación presencial entre el docente y el estudiante, donde el docente elabora materiales impresos, o recursos instruccionales tecnológicos (ej. simulación de sistemas de control robóticos) con el fin de que el estudiante tome conciencia de los procedimientos necesarios en la construcción del saber (Feo, 2010).

Lo anterior, nos lleva a considerar el uso de una estrategia didáctica en el proceso de formación en robótica que ayude a fortalecer el proceso de formación de estudiantes de ingeniería y la relación con la Educación Superior. Permite generar una respuesta a las inquietudes que los estudiantes describen al momento de aprender en una asignatura y se adapta a una estrategia mediada por tecnologías que integren el uso de recursos tecnológicos de manera lúdica para fortalecer el aprendizaje situado inteligente y colaborativo desde una visión de “estrategias didácticas, para mejorar un aprendizaje inteligente en el aula”. De esta manera, se integran dinámicas y favorezcan el desarrollo de habilidades y actitudes como el pensamiento crítico - reflexivo - creativo, bajo una responsabilidad, organización, autorreflexión en relación con el uso de didácticas tecnológicas, orientadas a competencias Cognitivas, comunicativas del saber específico en el tema de Robótica.

En consecuencia, la creación de esta Guía tiene en cuenta el desarrollo de estrategias pedagógicas, metodológicas y didácticas, para generar un aprendizaje en el aula mediado con tecnologías y pedagogías emergentes que cuentan con criterios de evaluación que ayudan a enriquecer el proceso de aprendizaje de una manera lúdica en la temática de Robótica. Como se establece en la Tabla 1. Estrategias didácticas para mejorar el aprendizaje en el aula.

| Criterios de comparación  | Aprendizaje basado en problemas (ABP)                                                                                                                                                                            | Método de caso (MC)                                                                                                                                                                                                  | Aprendizaje basado en investigación (ABI)                                                                                 | Aprendizaje basado en proyectos (ABPro)                                                                                                                                                         | Aprendizaje de servicio (A+S)                                                                                                                                                                                                                     | Aprendizaje basado en desafíos (ABDe)                                                                                                                                                                                                                     | Prácticas externas (PE)                                                                             |
|---------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Rol del estudiante</b> | Buscar y ampliar la información por medio de preguntas que dirigen la búsqueda de la información, sobre la problemática.                                                                                         | Preparan el caso por medio de la lectura de los temas relacionados, compartiendo análisis individuales, para anticiparse a una discusión colaborativa. Permite generar preguntas relevantes para solucionar el caso. | Se analizan las problemáticas para ser integradas desde la investigación y la producción de la información / conocimiento | Se define un plan de acción (actividades individuales y grupales), permitiendo analizar la información y generar un cumplimiento con el requerimiento por medio de la búsqueda de una solución. | Se diagnostica la necesidad, con el grupo de estudiantes, en el contexto de las competencias desarrolladas, se integra una planificación, e implementa un servicio solución.                                                                      | Se analiza la temática propuesta, definiendo los desafíos a abortar (ejercicios), desde las competencias desarrolladas. Se define el plan de trabajo, e implementa una propuesta de respuesta                                                             | Desempeño en el contexto profesional, como una práctica, para integrarse al mundo laboral contexto. |
| <b>Etapas</b>             | <p>Diseño del problema.</p> <p>Lectura y análisis del problema</p> <p>Formulación de hipótesis</p> <p>Brecha de aprendizaje</p> <p>Definición del problema</p> <p>Obtención de información</p> <p>Resultados</p> | <p>Elaboración o selección del caso.</p> <p>Preeliminar</p> <p>Exposición de ideas</p> <p>Análisis</p> <p>Conceptualización</p> <p>Evaluación</p>                                                                    | <p>Secuencia didáctica</p>                                                                                                | <p>Planificación del proyecto</p> <p>Desarrollo del proceso</p> <p>Evaluación</p>                                                                                                               | <p>Diagnostico participativo</p> <p>Diseño y planificación del proyecto (A+S)</p> <p>Alianzas y recursos</p> <p>Implementación y gestión del proyecto (A+S)</p> <p>Retroalimentación de la información e integración de tecnología didáctica.</p> | <p>Generación del desafío</p> <p>Búsqueda y análisis de la información</p> <p>Generación de propuestas de información</p> <p>Implementar la solución</p> <p>Difusión de la información</p> <p>Utilización de herramientas tecnológicas e informáticas</p> | <p>Planificación</p> <p>Implementación</p> <p>Seguimiento</p> <p>Evaluación</p>                     |

*Tabla 1*  
Estrategias Didácticas para mejorar el aprendizaje en el Aula  
Fuente: elaboración propia.

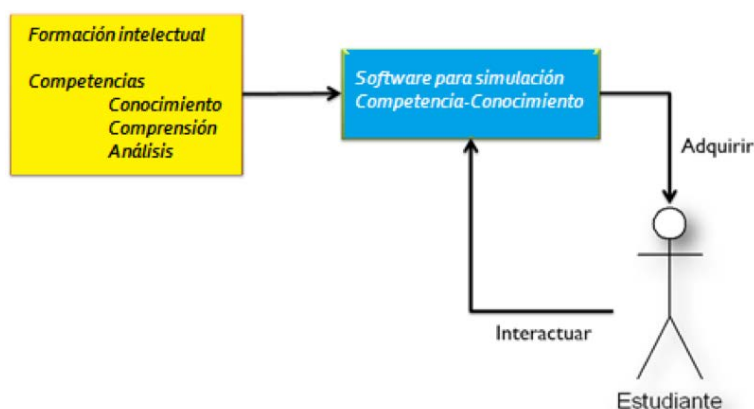
La guía permite una integración de aprendizajes utilizando el método de caso (MC) y el aprendizaje basado en desafíos (ABDe), para lo cual se analizó que la integración del mejor recurso tecnológico era la utilización del software Matlab-Simulink. Esto teniendo en cuenta que una de las propuestas que se están manejando en el ámbito internacional del aprendizaje basado en tecnología es la realización de simulaciones en programas computacionales que acercan al estudiante al diseño, desarrollo y aplicación de herramientas para el mundo real. En este caso, la construcción de robots industriales de tipo serial, los cuales son un medio que permite alcanzar el desarrollo de las competencias.

En palabras de Dr. Francisco J. Álvarez, “los objetos de conocimiento organizados en la mente significan cosas diferentes para cada sujeto de acuerdo con su experiencia y dependiendo de la categoría en la que se ubica, o los otros con los que se asocia”, lo que permite integrar diferentes relaciones en estructuras de aprendizaje, asociadas a los conocimientos que se integran en el lugar de conocimiento, ubicado como saber.

Al integrar un patrón como lo son las plantillas que aportan al proceso de composición de los objetos de aprendizaje, llamado objetivación (Chan, 2004), la relación está mediada por:

- Una organización interna
- La identificación y selección de las competencias a desarrollar
- Las dimensiones del aprendizaje (Marzano y Pickering, 1998) o tipos de actividades cognitivas

Que, junto con la información y las instrucciones, construirán la simulación de los sistemas de control robótico, representado como recurso tecnológico, para que el estudiante pueda relacionar actividades, saberes y una retroalimentación que ayude a comprender el tema de la robótica en la formación del ingeniero mecatrónica. Se propende por comprender las tecnologías con una postura crítica en relación con las necesidades del contexto – holotipo Social, como se puede observar en la Figura 1.



*Figura 1*  
Interacción del estudiante con el software computacional  
para simulación de sistemas robóticos.  
Fuente: elaboración propia.

En este sentido, la producción y uso de software computacional en la comunidad educativa termina por apoyar el modelo educativo institucional, dado que el uso de simulación en programas como Matlab®/Simulink, posibilita el uso de herramientas software en el curso de Robótica, un programa formativo que comparte problemáticas afines abordadas desde una visión multidisciplinar.

Además, permite que tanto el docente como los estudiantes de Ingeniería adquieran las siguientes habilidades:

- Profesor
  - El uso de Software computacional para simulación, que facilita y apoya el aprendizaje inteligente.
  - Facilitará retroalimentar de manera oportuna el progreso de los estudiantes
  - Facilitará seguir el trabajo colaborativo de los alumnos por medio de talleres
  - Capacitación en el uso de nuevas tecnologías de información (Matlab®)
- Estudiantes
  - Capacidad de reflexión y crítica
  - Capacidad de interactuar con los contenidos de aprendizaje y lograr los objetivos de manera exitosa
  - Capacidad de asumir de manera progresiva y responsable la dirección y control de su aprendizaje
  - Constructores de su propio conocimiento, al seleccionar, elaborar, organizar, utilizar y dar significado a la información
  - Responder favorablemente hacia el trabajo colaborativo (Álvarez et al., 2007, pp. 910)

Como lo afirman los autores (Ramírez et al., 2010) es necesario que la calidad de las simulaciones como recurso digital para la transferencia del conocimiento, se centre fundamentalmente en formar la identidad, diversidad y la variedad de maneras como aprende el estudiante.

Lo anterior refleja la necesidad de adaptarse al manejo de software computacionales para el desarrollo de tecnologías emergentes y comprender el significado de las tecnologías del aprendizaje y conocimiento (TAC) en la Educación Superior. Todo esto en relación con la didáctica de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC). De acuerdo con Sánchez (2008), las TIC son tecnologías utilizadas para gestionar la información de manera que se pueda crear, modificar, almacenar, proteger y recuperar por medio del uso de ordenadores; sin embargo, el mismo autor aclara que no solo las tecnologías modernas hacen parte de las TIC, sino que los medios de comunicación convencionales como radio, televisión y telefonía también.

Desde su surgimiento, las TIC han evolucionado hasta convertirse en herramientas de uso diario o habitual, logrando transformar la sociedad, pasando de la sociedad de la información a la sociedad del conocimiento. De esta manera, las TIC han establecido un acercamiento al conocimiento e incluso han logrado gestionarlo; y es precisamente de esta forma como surge el concepto de tecnologías del aprendizaje y el conocimiento (TAC) (Moya, 2013). Las TAC explican las nuevas posibilidades que la tecnología abre en la educación; dicho de otra manera, estas se entienden como la adecuación de las TIC a entornos educativos. Por tanto, ellas van más allá de la mera disponibilidad de las tecnologías, y hacen hincapié en el uso

de software de simulación, potenciando el aprendizaje inteligente. En este sentido, cuando estas dejan de usarse como un elemento meramente instrumental y vuelven más eficiente el modelo educativo, adquieren una nueva función: la de posibilitar y apoyar la transposición del conocimiento, permitiendo la apropiación de la información (Moya, 2013).

Como lo dice Lozano (2011), “Las TAC tratan de orientar las TIC hacia unos usos más formativos” (p. 45), es por esto por lo que cada día se utilizan más los recursos tecnológicos en la educación. Para Aguilar (2012), las TIC pueden ser instrumentos útiles para mejorar la enseñanza-aprendizaje de los procesos educativos, todo con ayuda de entornos o recursos tecnológicos que mejoran la creatividad y la innovación en los estudiantes, en relación con el desarrollo del concepto de las Mediaciones tecnológicas en procesos de aprendizaje inteligente, como se describe a continuación:

Las investigaciones tomadas en cuenta en los últimos cinco años en el contexto nacional e internacional, relacionadas con el concepto de mediaciones tecnológicas donde se integran en la Educación se pueden observar a continuación:

Los autores Pérez y Castillo (1996), en su artículo “La mediación pedagógica” refiere apuntes para una educación a distancia alternativa, muestra la diferencia entre un modelo pedagógico que tiene como fin educar y un modelo temático con el fin de enseñar, dos conceptos que van de la mano al momento de hablar de autoaprendizaje didáctico, pues resulta complejo pensar en una educación a distancia que se da a través de una mediación pedagógica guiada por textos y otros materiales, de acuerdo a esto el estudiante es autónomo de generar su aprendizaje, y es ahí donde el concepto de mediación pedagógica tiene una concepción opuesta a los sistemas instruccionales, basados en la enseñanza solo como un traspaso de información pero no como un tratamiento de contenidos logrando crear en el estudiante un aprendizaje más significativo donde pueda expresar todas las habilidades y destrezas que tenga.

El autor Ricardo Sandoval Barros (2011), realizó una investigación con respecto a las mediaciones tecnológicas en el campo educativo. Él plantea varias soluciones con respecto a las desigualdades que existen en el ámbito educativo donde quiere que la población juvenil no sea marginada de la cultura por no tener acceso a la tecnología. De igual manera, autores como Cabero en el año 2000 resaltan el significado en el proceso de aprendizaje al incorporar herramientas tecnológicas en el currículum de clase, esto permite que la educación tenga instrumentos para mejorar el aprendizaje en los estudiantes, ayudando a reforzar la investigación y formación de docentes de las instituciones educativas de esta manera se logra avanzar en la sociedad con autonomía.

Por su parte, el estudio realizado por Edgar Erazo y Germán Muñoz en el año 2007, pretende identificar cómo se lleva el proceso de mediaciones tecnológicas en el municipio de Dosquebradas, Risaralda, Colombia, con una investigación fenomenológica que tiende a entender cómo es la relación entre las mediaciones tecnológicas y procesos de subjetivación juvenil, donde estos procesos fueron llamados por los investigadores como “subjetivaciones tecno juveniles”, es decir, observar cuales son los fenómenos que existen cuando los jóvenes interactúan con la tecnología, según los autores mencionados anteriormente

Cuando nos preguntamos si ellos y ellas ‘conforman’ las mediaciones tecnológicas, estamos suponiendo su capacidad creativa, es decir, intuimos que no solo ‘consumen’ tecnologías y las implicaciones que éstas comportan, sino que también están en posibilidad de crearlas, de darles forma (Erazo y Muñoz, 2016, p.727).

Esa es la gran pregunta, los jóvenes están listos para crear tecnología, donde la creación de contenidos digitales motiva a los estudiantes a generar un aprendizaje más significativo.

Al integrar la tecnología en la educación es muy importante tener en cuenta el trabajo de investigación de Henry Alfonso Muñoz Rojas (2016), quien busca explicar cómo es la transformación de las prácticas pedagógicas que pueden llegar a crear nuevos escenarios educativos, en su trabajo denominado “Mediaciones tecnológicas: nuevos escenarios de la práctica pedagógica”. En nivel de integración tecnológica en la educación en los años 1990 y 2010 resultó con poca apropiación de tecnología o casi nula, pero en año 2011 se vio un gran avance con respecto al uso de plataformas como Lms, apoyadas generalmente con la modalidad presencial. Asumir las nuevas tecnologías en el quehacer diario, tiene una serie de consecuencias en la investigación, se identificó que crear nuevos espacios de aprendizaje genera nuevas formas de aprendizaje, esto quiere decir que el reto es mayor debido a que construir los contenidos no solamente es montar en la plataforma las temáticas del currículo, si no que entra en juego, la identificación del mejor recurso educativo apoyado en la pedagogía, buscar cómo se genera el aprendizaje con el uso de la mediación tecnológica y la transformación de la práctica pedagógica del maestro. Vista desde diferentes perspectivas, la tecnología se convierte en un componente mediático que facilitan la comunicación, interacción y la transposición del conocimiento a los estudiantes.

Lo mencionado anteriormente, propone sociedades articuladas expresando ideas, guías, tecnologías y métodos para observar una comunidad estudiantil que se retroalimenta de la información, que marca nuevos retos y oportunidades en cuanto al desarrollo de su aprendizaje. Por tal motivo ser partícipes de las sociedades alrededor de estos requisitos, constituyó una ardua tarea, dado que los aspectos socioeconómicos y tecnológicos impactarán el enfoque de las sociedades al momento de intervenir en el desarrollo estudiantil.

## FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR Y DIDÁCTICA

La integración de estrategias didácticas en el aula de clase de manera tradicional con integración de tecnologías del aprendizaje y comunicación, con enfoque práctico y orientado al desarrollo de competencias comunicativas, cognitivas y tecnológicas, permite alcanzar la formación del pensamiento crítico. Todo esto en relación con la tecnología ubicua (TU), que plantea actividades como:

- Pensamiento de alto orden que proporciona los RIC: uso de lenguaje, proceso de interiorización, abstracción, descontextualización y formación de conceptos, mediados por tecnologías de la información en el aprendizaje.
- Interacción de tecnologías (IT)
- Mediaciones tecnológicas (MT)
- Entornos personales de aprendizaje (PLE)

Lo anterior permite que el docente integre conocimientos desde su saber específico de formación en el desarrollo de su praxis pedagógica, que incluya estrategias didácticas y comunicativas para fortalecer el proceso de aprendizaje y poder disminuir la deserción y el desinterés del estudiante en temas de tecnologías emergentes relacionadas con tendencias en el saber de la robótica:

a. Entrega de componentes cognitivos en el tema de robótica, mediante la inclusión de tendencias tecnológicas, mediadas por didácticas para la formación de estudiantes de ingeniería y orientadas al fortalecimiento de competencias.

b. Integrar recursos de información y comunicación (RIC) pertinentes en el aula, como estrategias didácticas en el programa de Ingeniería Mecatrónica para la asignatura de Robótica, utilizando el aprendizaje inteligente cooperativo para la apropiación de conocimiento, en la sociedad del conocimiento.

Esto lleva a la siguiente pregunta: ¿cuáles son los conceptos clave en la implementación de una estrategia didáctica?

Es importante generar una reflexión desde la integración de la didáctica en el concepto de Competencia, y cómo esta es representada en el desarrollo y evolución del concepto tecnológico, por medio de tecnologías del aprendizaje y conocimiento (TAC), y mediada por recursos de información y comunicación (RIC). Es decir, como un proceso mediático de Modalidad presencial con apoyo de herramientas tecnológicas computacionales como Matlab®-Simulink.

Se debe tener en cuenta que, para la apropiación de recursos tecnológicos, y la relación de competencias “digitales”, se requiere de:

- Técnicas de computación
- Herramientas de análisis
- Capacidad de enfocar (saber mediado por tecnología)
- Tecnologías con visión social
- Transformación de soluciones tradicionales e innovadoras.

Lo anterior nos lleva a considerar los atributos de la competencia con respecto a los saberes teóricos (conceptos, conocimientos) que propicia la asignatura de robótica. Eso permite integrar estrategias didácticas como: técnicas, actividades y recursos tecnológicos, para crear una estrategia metodológica que ayude a integrar y comprender: una transformación en el *modelo pedagógico* para el fomento de nuevos escenarios autónomos en el proceso de aprendizaje en el aula que propicien nuevos lenguajes y formas de comunicación, representados en propuestas didácticas, relacionadas con la adaptación de entornos virtuales de aprendizaje (EVA), relación con el constructivismo y las TIC. Autores como Coll, Mauri y Onrubia (2008) proponen el uso y conocimiento de recursos TIC, en consecuencia, en la Figura 2 se aprecian las bondades del uso de herramientas computacionales para simulación, que cumplen con las características mencionadas:

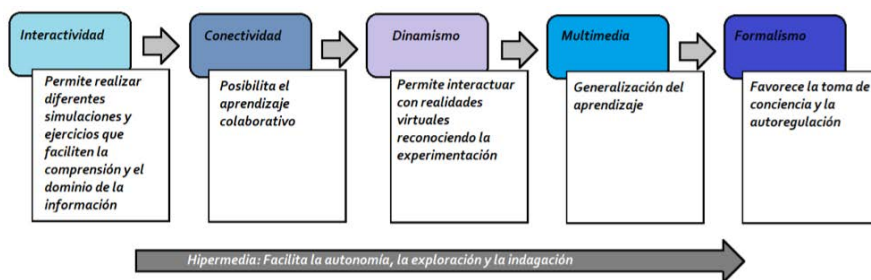


Figura 2

Características del uso de herramientas computacionales para simulación

Fuente: elaboración propia.

La integración de características como: interactividad, conectividad, dinamismo, multimedia y formalismo permite referenciar el direccionamiento de la temática de robótica con tendencia a comprender el aprendizaje inteligente en relación con una mediación desde el concepto de hipermedia, el cual facilita la autonomía, la exploración y la indagación en los estudiantes, que son recurrentes al interactuar con tecnologías emergentes.

## CAPÍTULO 1: El modelo dinámico

En la *Guía práctica para el proceso de aprendizaje de la asignatura Robótica – Parte I* (Ruiz y Burbano, 2019) se presentaron las bases y el procedimiento necesarios para realizar el modelo geométrico (descripción de las posiciones y orientaciones del robot en función de las coordenadas articulares) y cinemático (descripción de las velocidades cartesianas y articulares) para robots industriales tipo serie. Además, se resaltó la importancia del manejo básico del álgebra lineal (multiplicación y suma, la transpuesta y la inversa de matrices, entre otros) y conceptos de transformación de coordenadas, teniendo en cuenta la necesidad de describir la posición y orientación del robot en cada instante, expresando la ubicación de cada eslabón robótico con respecto a los demás.

En la presente guía se abordará el modelado dinámico de robots industriales tipo serie, basándose en los ejercicios de evaluación 2.a y 2.b. de la primera guía (Ruiz y Burbano, 2019), esto teniendo en cuenta la necesidad de seguir un estricto orden en el procedimiento del modelado de los robots. En primer lugar, el modelo geométrico, donde se ha determinado la tabla de parámetros geométricos y las matrices de transformación de los robots de cuatro grados de libertad: SCARA y cilíndrico, seguido del modelo cinemático donde se consideran las propiedades geométricas del robot de estudio, las cuales fueron previamente determinadas en el modelo geométrico. El modelo cinemático directo determina las velocidades de las articulaciones de un robot dentro del plano cartesiano tridimensional de su espacio operacional, en función de la velocidad de cada articulación en el espacio articular (Khalil y Dombre, 2002) sin considerar las fuerzas que producen el movimiento de estas. Finalmente, el modelo dinámico de un robot comprende el conjunto de datos geométricos, cinemáticos y dinámicos que determinan la relación entre las fuerzas que actúan sobre los cuerpos del robot, y los efectos que se producirán sobre el movimiento de estos.

Para la obtención del modelo dinámico es necesario calcular, en primer lugar, los parámetros dinámicos correspondientes a los valores que integran las ecuaciones dinámicas de un robot. Después, con ayuda del método de LaGrange, se relacionan funciones como: posiciones, velocidades, aceleraciones articulares y fuerzas del robot que se requieren maximizar o minimizar, permitiendo calcular las fuerzas sobre el órgano terminal del robot en función de la energía total del sistema. Finalmente, se calcula la energía cinética y potencial asociada a cada cuerpo del robot para la construcción de la matriz de inercia y el vector de fuerzas de gravedad, respectivamente. Con estos valores finales se construye el modelo dinámico y se procede a realizar la simulación del robot en un software computacional como Matlab®Simulink con el objetivo de: 1) obtener los torques o fuerzas que requieren los motores, determinando así, el tipo de motor a implementar, 2) la identificación de los parámetros inerciales del robot, y 3) lograr sintonizar el controlador.

En términos de sistemas de control, el modelo dinámico corresponde a la función de transferencia del robot necesaria para realizar pruebas de simulación en un software computacional, con entradas definidas como posiciones, trayectorias y velocidades articulares deseadas, con el objetivo de sintonizar el controlador. Matemáticamente, expresa la relación entre las fuerzas o pares aplicados a los actuadores y las posiciones articulares, su primera y segunda derivada (velocidad y aceleración articular, respectivamente) (Khalil y Dombre, 2002).

A continuación, se introduce el tema y se explica cada uno de los elementos necesarios para la construcción del modelo dinámico, a través de algunos ejemplos prácticos y ejercicios propuestos.

## Parámetros dinámicos

Los parámetros dinámicos corresponden a los valores que integran las ecuaciones dinámicas de un robot (Vivas, 2010). Estos son:

- $M_j$ : masa correspondiente al cuerpo  $j$ , para  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ; donde  $n$  es igual al número de grados de libertad del robot.
- $Ia_j$ : inercia del accionador  $j$
- Primer momento de inercia (momento estático o de primer orden):

$${}_jFM_j = [M_jX_j \ M_jY_j \ M_jZ_j] \quad (1)$$

Donde,

$X_j$ : distancia del centro de masa del cuerpo  $j$  en el eje X, al origen del sistema de coordenadas.

$Y_j$ : distancia del centro de masa del cuerpo  $j$  en el eje Y, al origen del sistema de coordenadas.

$Z_j$ : distancia del centro de masa del cuerpo  $j$  en el eje Z, al origen del sistema de coordenadas.

Por otro lado, se puede representar el primer momento de inercia en su forma transpuesta, así:

$$FM_1 = [M_jX_j \ M_jY_j \ M_jZ_j]^T \quad (2)$$

Segundo momento de inercia (tensor de inercia o de segundo orden):

$${}_jSM_j = [XX_j \ XY_j \ XZ_j \ XY_j \ YY_j \ YZ_j \ XZ_j \ YZ_j \ ZZ_j] \quad (3)$$

Donde:

$$\begin{aligned} XX_j &= \int (Y_j^2 + Z_j^2) dm; & XY_j &= - \int X_j Y_j dm; & XZ_j &= - \int X_j Z_j dm; & YY_j &= \int (X_j^2 + Z_j^2) dm; \\ YZ_j &= - \int Y_j Z_j dm; & ZZ_j &= \int (X_j^2 + Y_j^2) dm \end{aligned}$$

### Ejercicio de evaluación 1.1. Cálculo de momentos de inercia

A continuación, se presenta un ejemplo para determinar los momentos de inercia de cuerpos robóticos anclados a una base, partiendo de un sistema en el origen cartesiano.

a. Determine numéricamente el tensor de inercia y el primer momento de inercia para cada eslabón del siguiente robot de dos grados de libertad:

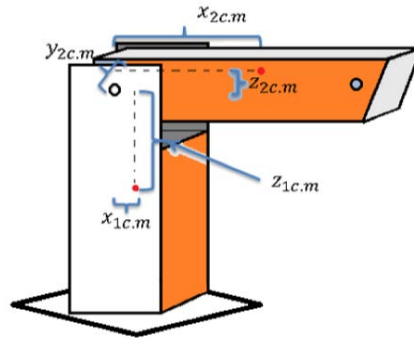


Figura 3  
Robot de dos grados de libertad  
Fuente: elaboración propia.

$M_1 = 5.28 \text{ kg}$ ;  $M_2 = 4.21 \text{ kg}$ ;  $x_{1c.m} = 0.032 \text{ m}$ ;  $y_{1c.m} = 0 \text{ m}$ ;  $z_{1c.m} = 0.200 \text{ m}$ ;  $x_{2c.m} = 0.250 \text{ m}$ ;  $y_{2c.m} = 0.03 \text{ m}$ ;  $z_{2c.m} = 0.048 \text{ m}$ .

b) Determine numéricamente el tensor de inercia y el primer momento de inercia para cada eslabón del siguiente robot de tres grados de libertad:

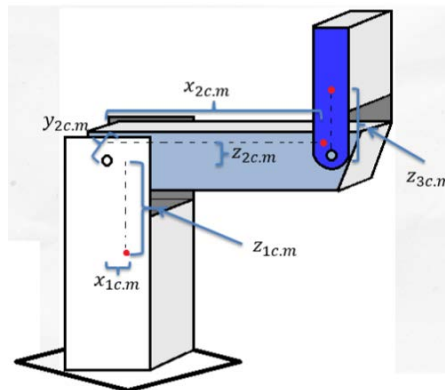


Figura 4  
Robot de tres grados de libertad  
Fuente: elaboración propia.

$M_1 = 8.8 \text{ kg}$ ;  $M_2 = 6.12 \text{ kg}$ ;  $M_3 = 4.1 \text{ kg}$ ;  $x_{1c.m} = 0.04 \text{ m}$ ;  $z_{1c.m} = 0.27 \text{ m}$ ;  $x_{2c.m} = 0.35 \text{ m}$ ;  $y_{2c.m} = 0.045 \text{ m}$ ;  $z_{2c.m} = 0.06 \text{ m}$ ;  $z_{3c.m} = 0.18 \text{ m}$

### Solución ejercicio de evaluación 1.1

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (3), se procede a calcular numéricamente los momentos de inercia para cada caso:

- a. Primer momento de inercia para  $j=1$ , es decir, para el primer eslabón:

$$1FM_1 = [M_1X_1 \ M_1Y_1 \ M_1Z_1]^T$$

Reemplazando los valores de cada parámetro se tiene que

$$1FM_1 = [(5.28 \text{ kg})(0.032 \text{ m}) \ (5.28 \text{ kg})(0 \text{ m}) \ (5.28 \text{ kg})(0.200 \text{ m})]^T$$

Entonces,

$$1FM_1 = [0.16896 \ 0 \ 1.056]^T$$

Primer momento de inercia para  $j=2$ , es decir, para el segundo eslabón:

$$2FM_2 = [M_2X_2 \ M_2Y_2 \ M_2Z_2]^T$$

$$2FM_2 = [(6.5 \text{ kg})(0.250 \text{ m}) \ (6.5 \text{ kg})(0.03 \text{ m}) \ (6.5 \text{ kg})(0.048 \text{ m})]^T$$

$$2FM_2 = [1.625 \ 0.195 \ 0.312]^T$$

Ahora, se procede a calcular el segundo momento de inercia para  $j=1$ :

$$\begin{aligned} 1SM_1 = & [XX_1 \ XY_1 \ XZ_1 \ XY_1 \ YY_1 \ YZ_1 \ XZ_1 \ YZ_1 \ ZZ_1] \\ = & \left[ \int (Y_1^2 + Z_1^2) dm - \int X_1 Y_1 dm - \int X_1 Z_1 dm \right. \\ & - \int X_1 Y_1 dm \int (X_1^2 + Z_1^2) dm - \int Y_1 Z_1 dm - \int X_1 Z_1 dm \\ & \left. - \int Y_1 Z_1 dm \int (X_1^2 + Y_1^2) dm \right] \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de cada parámetro, y teniendo en cuenta que el diferencial de la integral es con respecto a la masa, se tiene que

$$\begin{aligned} 1SM_1 = & \left[ ((0)^2 + (0.2)^2) \int dm - (0.032)(0) \int dm - (0.032)(0.2) \int dm \right. \\ & - (0.032)(0) \int dm ((0.032)^2 + (0.2)^2) \int dm - (0)(0.2) \int dm \\ & \left. - (0.032)(0.2) \int dm - (0)(0.2) \int dm ((0.032)^2 + (0)^2) \int dm \right] \end{aligned}$$

Entonces,

$$1SM_1 = [((0)^2 + (0.2)^2)M_1 \ 0 \ - (0.032)(0.2)M_1 \ 0 \ ((0.032)^2 + (0.2)^2)M_1 \ 0 \\ - (0.032)(0.2)M_1 \ 0 \ ((0.032)^2 + (0)^2)M_1]$$

Con  $M_1 = 5.28kg$ ,

$$1SM_1 = [(0.2 \ m)^2(5.28kg) \ 0 \ - (0.032)(0.2)(5.28kg) \ 0 \ ((0.032)^2 + (0.2)^2)(5.28kg) \ 0 \\ - (0.032)(0.2)(5.28kg) \ 0 \ (0.032)^2(5.28kg)]$$

Finalmente,

$$1SM_1 = [0.2112 \ 0 \ - 0.0338 \ 0 \ 0.2166 \ 0 \ - 0.0338 \ 0 \ 0.0054]$$

Segundo momento de inercia para  $j = 2$ :

$$2SM_2 = [XX_2 \ XY_2 \ XZ_2 \ XY_2 \ YY_2 \ YZ_2 \ XZ_2 \ YZ_2 \ ZZ_2] \\ = \left[ \int (Y_2^2 + Z_2^2)dm - \int X_2Y_2dm - \int X_2Z_2dm \right. \\ \left. - \int X_2Y_2dm \int (X_2^2 + Z_2^2)dm - \int Y_2Z_2dm - \int X_2Z_2dm \right. \\ \left. - \int Y_2Z_2dm \int (X_2^2 + Y_2^2)dm \right]$$

Reemplazando los valores de cada parámetro, y teniendo en cuenta que el diferencial de la integral es con respecto a la masa, se tiene que

$$2SM_2 = [((0.03)^2 + (0.048)^2)M_2 - (0.250)(0.03)M_2 - (0.250)(0.048)M_2 \\ - (0.250)(0.03)M_2 - ((0.250)^2 + (0.048)^2)M_2 - (0.03)(0.048)M_2 \\ - (0.250)(0.048)M_2 - (0.03)(0.048)M_2 - ((0.250)^2 + (0.03)^2)M_2]$$

Con  $M_2 = 6.5kg$ ,

$$2SM_2 = [((0.03)^2 + (0.048)^2)(6.5kg) - (0.250)(0.03)(6.5kg) - (0.250)(0.048)(6.5kg) \\ - (0.250)(0.03)(6.5kg) - ((0.250)^2 + (0.048)^2)(6.5kg) - (0.03)(0.048)(6.5kg) \\ - (0.250)(0.048)(6.5kg) - (0.03)(0.048)(6.5kg) - ((0.250)^2 + (0.03)^2)(6.5kg)]$$

b) Para el robot de tres grados de libertad, el primer momento de inercia para  $j = 1$ , es:

$$1FM_1 = [M_1X_1 \ M_1Y_1 \ M_1Z_1]^T$$

Reemplazando los valores de cada parámetro se tiene que

$$1FM_1 = [(8.8 \ kg)(0.04 \ m) \ (8.8 \ kg)(0 \ m) \ (8.8 \ kg)(0.27 \ m)]^T$$

Entonces

$$1FM_1 = [0.352 \ 0 \ 2.376]^T$$

Primer momento de inercia para  $j = 2$ ;

$$2FM_2 = [M_2X_2 \ M_2Y_2 \ M_2Z_2]^T$$

$$2FM_2 = [(6.12 \text{ kg})(0.250 \text{ m}) \ (6.12 \text{ kg})(0.03 \text{ m}) \ (6.12 \text{ kg})(0.048 \text{ m})]^T$$

$$2FM_2 = [1.53 \ 0.1836 \ 0.2937]^T$$

Primer momento de inercia para  $j = 3$ ;

$$3FM_3 = [M_3X_3 \ M_3Y_3 \ M_3Z_3]^T$$

$$3FM_3 = [(4.1 \text{ kg})(0) \ (4.1 \text{ kg})(0) \ (4.1 \text{ kg})(0.18 \text{ m})]^T$$

$$3FM_3 = [0 \ 0 \ 0.738]^T$$

Ahora, se procede a calcular el segundo momento de inercia para  $j = 1$ :

$$1SM_1 = \left[ \int (Y_1^2 + Z_1^2) dm - \int X_1 Y_1 dm - \int X_1 Z_1 dm \right. \\ \left. - \int X_1 Y_1 dm \int (X_1^2 + Z_1^2) dm - \int Y_1 Z_1 dm - \int X_1 Z_1 dm \right. \\ \left. - \int Y_1 Z_1 dm \int (X_1^2 + Y_1^2) dm \right]$$

Reemplazando los valores de cada parámetro, y teniendo en cuenta que el diferencial de la integral es con respecto a la masa, se tiene que

$$1SM_1 = \left[ ((0)^2 + (0.27)^2) \int dm - (0.04)(0) \int dm - (0.04)(0.27) \int dm \right. \\ \left. - (0.04)(0) \int dm ((0.04)^2 + (0.27)^2) \int dm - (0)(0.27) \int dm \right. \\ \left. - (0.04)(0.27) \int dm - (0)(0.27) \int dm ((0.04)^2 + (0)^2) \int dm \right]$$

Con  $M_1 = 8.8 \text{ kg}$ ,

$$1SM_1 = [(0.27 \text{ m})^2(8.8 \text{ kg}) \ 0 - (0.04)(0.27)(8.8 \text{ kg}) \ 0 \ ((0.04)^2 + (0.27)^2)(8.8 \text{ kg}) \ 0 \\ - (0.04)(0.27)(8.8 \text{ kg}) \ 0 \ (0.04)^2(8.8 \text{ kg})]$$

Finalmente,

$$1SM_1 = [0.6415 \ 0 - 0.0338 \ 0 \ 0.6556 \ 0 - 0.0338 \ 0 \ 0.01408]$$

Segundo momento de inercia para  $j = 2$ :

$$\begin{aligned}
 2SM_2 &= [XX_2 XY_2 XZ_2 XY_2 YY_2 YZ_2 XZ_2 YZ_2 ZZ_2] \\
 &= \left[ \int (Y_2^2 + Z_2^2) dm - \int X_2 Y_2 dm - \int X_2 Z_2 dm \right. \\
 &\quad - \int X_2 Y_2 dm \int (X_2^2 + Z_2^2) dm - \int Y_2 Z_2 dm - \int X_2 Z_2 dm \\
 &\quad \left. - \int Y_2 Z_2 dm \int (X_2^2 + Y_2^2) dm \right]
 \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de cada parámetro, y teniendo en cuenta que el diferencial de la integral es con respecto a la masa, con  $M_2 = 6.12kg$ , se tiene,

$$\begin{aligned}
 2SM_2 &= [((0.045)^2 + (0.06)^2)(6.12kg) - (0.35)(0.045)(6.12kg) - (0.35)(0.06)(6.12kg) \\
 &\quad - (0.35)(0.045)(6.12kg) ((0.35)^2 + (0.06)^2)(6.12kg) - (0.045)(0.06)(6.12kg) \\
 &\quad - (0.35)(0.06)(6.12kg) - (0.045)(0.06)(6.12kg) ((0.35)^2 + (0.045)^2)(6.12kg)]
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$2SM_2 = [0.0344 - 0.0964 - 0.1285 - 0.0964 \ 0.7717 - 0.0165 - 0.1285 - 0.0165 \ 0.762]$$

Segundo momento de inercia para  $j = 3$

$$\begin{aligned}
 3SM_3 &= \left[ \int (Y_3^2 + Z_3^2) dm - \int X_3 Y_3 dm - \int X_3 Z_3 dm \right. \\
 &\quad - \int X_3 Y_3 dm \int (X_3^2 + Z_3^2) dm - \int Y_3 Z_3 dm - \int X_3 Z_3 dm \\
 &\quad \left. - \int Y_3 Z_3 dm \int (X_3^2 + Y_3^2) dm \right]
 \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de cada parámetro, y teniendo en cuenta que el diferencial de la integral es con respecto a la masa, con  $M_3 = 4.1kg$ , se tiene,

$$\begin{aligned}
 3SM_3 &= [((0)^2 + (0.18)^2)(4.1kg) - (0)(0)(4.1kg) - (0)(0.18)(4.1kg) \\
 &\quad - (0)(0)(4.1kg) ((0)^2 + (0.18)^2)(4.1kg) - (0)(0.18)(4.1kg) \\
 &\quad - (0)(0.18)(4.1kg) - (0)(0.18)(4.1kg) ((0)^2 + (0)^2)(4.1kg)]
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$2SM_2 = [0.1328 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1328 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

### Ejercicio práctico 1.1. Cálculo de momentos de inercia

Determine numéricamente el tensor de inercia y el primer momento de inercia para cada eslabón del siguiente robot de tres grados de libertad.

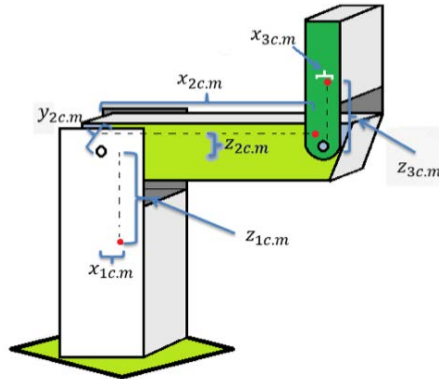


Figura 5  
Robot de tres grados de libertad- ejercicio práctico 1.a.  
Fuente: elaboración propia.

$M_1 = 7.32 \text{ kg}$ ;  $M_2 = 4.95 \text{ kg}$ ;  $M_3 = 4.21 \text{ kg}$ ;  $x_{1c.m} = 0.041 \text{ m}$ ;  $z_{1c.m} = 0.31 \text{ m}$ ;  $x_{2c.m} = 0.292 \text{ m}$ ;  $y_{2c.m} = 0.051 \text{ m}$ ;  $z_{2c.m} = 0.058 \text{ m}$ ;  $x_{3c.m} = 0.045 \text{ m}$ ;  $z_{3c.m} = 0.192 \text{ m}$

### Parámetros de base

Un estudio realizado por Wisama Khalil y Etienne Dombre en el 2002 describe una técnica para realizar un juego mínimo de parámetros (de base) necesarios para describir la dinámica de robots industriales de tipo serial a través de consideraciones mecánicas. Esto permite reducir sustancialmente la cantidad de parámetros dinámicos según una serie de reglas:

1. El robot debe disponer de al menos dos articulaciones rotoideas que cumplan con el siguiente criterio: a la primera articulación rotoide partiendo de la base se le llamará R1, y a la siguiente articulación rotoide después de R1 que tenga eje Z ( $Z_{R2}$ ) no paralelo al eje Z de R1 ( $Z_{R1}$ ) se le llamará R2.

2. Partiendo de la última articulación,

- Quando una articulación es de tipo rotoide se hace uso de las siguientes ecuaciones:

$$XXR_j = XX_j - YY_j \quad (4)$$

$$XXR_{j-1} = XX_{j-1} + YY_j + 2r_j MZ_j + r_j^2 M_j \quad (5)$$

$$XYR_{j-1} = XY_{j-1} + d_j \text{sen}(\alpha_j) MZ_j + d_j r_j \text{sen}(\alpha_j) M_j \quad (6)$$

$$XZR_{j-1} = XZ_{j-1} - d_j \cos(\alpha_j) MZ_j + d_j r_j \cos(\alpha_j) M_j \quad (7)$$

$$YYR_{j-1} = YY_{j-1} + \cos^2(\alpha_j) YY_j + 2r_j \cos^2(\alpha_j) MZ_j + (d_j^2 + r_j^2 \cos^2(\alpha_j)) M_j \quad (8)$$

$$YZR_{j-1} = YZ_{j-1} - \cos(\alpha_j) \sin(\alpha_j) YY_j + 2r_j \cos(\alpha_j) \sin(\alpha_j) MZ_j + r_j^2 \cos(\alpha_j) \sin(\alpha_j) M_j \quad (9)$$

$$ZZR_{j-1} = ZZ_{j-1} - \sin^2(\alpha_j) YY_j + 2r_j \sin^2(\alpha_j) MZ_j + (d_j^2 + r_j^2 \sin^2(\alpha_j)) M_j \quad (10)$$

$$MXR_{j-1} = MX_{j-1} + d_j M_j \quad (11)$$

$$MYR_{j-1} = MY_{j-1} - \sin(\alpha_j) MZ_j - r_j \sin(\alpha_j) M_j \quad (12)$$

$$MZR_{j-1} = MZ_{j-1} + \cos(\alpha_j) MZ_j + r_j \cos(\alpha_j) M_j \quad (13)$$

$$MR_{j-1} = M_{j-1} + M_j \quad (14)$$

La letra R al final de cada parámetro indica reagrupación, es decir, contiene a este parámetro y a otros más. Si después de resolver la ecuación queda reagrupado únicamente el parámetro del caso (Ejemplo:  $XXR_j = XX_j$ ) deberá quitársele la letra R porque no tiene sentido reagruparse a él mismo únicamente, y a estos parámetros se les denominará “Parámetros mínimos”, los cuales son fundamentales para describir la dinámica de los robots industriales de tipo serial.

De esta manera, con las ecuaciones (4-14) quedarán reagrupados  $YY_j$ ,  $MZ_j$  y  $M_j$ , por lo tanto, estos parámetros no serán tenidos en cuenta en la construcción de los momentos de inercia (2) y (3) para su posterior uso en las ecuaciones de energía cinética (5).

Cuando una articulación es de tipo prismática se hace uso de las siguientes ecuaciones:

$$XXR_{j-1} = XX_{j-1} + \cos^2(\theta_j) XX_j - 2\cos(\theta_j) \sin(\theta_j) XY_j + \sin^2(\theta_j) YY_j \quad (15)$$

$$\begin{aligned} XYR_{j-1} = & XY_{j-1} + \cos(\theta_j) \sin(\theta_j) \cos(\alpha_j) XX_j + [\cos^2(\theta_j) - \sin^2(\theta_j)] \cos(\alpha_j) XY_j \\ & - \cos(\theta_j) \sin(\alpha_j) XZ_j - \cos(\theta_j) \sin(\theta_j) \cos(\alpha_j) YY_j + \sin(\theta_j) \sin(\alpha_j) YZ_j \end{aligned} \quad (16)$$

$$XZR_{j-1} = XZ_{j-1} + \cos(\theta_j)\sin(\theta_j)\sin(\alpha_j)XX_j + [\cos^2(\theta_j) - \sin^2(\theta_j)]\sin(\alpha_j)XY_j - \cos(\theta_j)\cos(\alpha_j)XZ_j - \cos(\theta_j)\sin(\theta_j)\cos(\alpha_j)YY_j + \sin(\theta_j)\cos(\alpha_j)YZ_j \quad (17)$$

$$YYR_{j-1} = YY_{j-1} + \sin^2(\theta_j)\cos^2(\alpha_j)XX_j + 2\cos(\theta_j)\sin(\theta_j)\cos^2(\alpha_j)XY_j - 2\sin(\theta_j)\cos(\alpha_j)\sin(\alpha_j)XZ_j - \cos^2(\theta_j)\cos^2(\alpha_j)YY_j - 2\cos(\theta_j)\cos(\alpha_j)\sin(\alpha_j)YZ_j + \sin^2(\alpha_j)ZZ_j \quad (18)$$

$$YZR_{j-1} = YZ_{j-1} + \sin^2(\theta_j)\cos(\alpha_j)\sin(\alpha_j)XX_j + 2\cos(\theta_j)\sin(\theta_j)\cos(\alpha_j)\sin(\alpha_j)XY_j + \sin(\theta_j)[\cos^2(\alpha_j) - \sin^2(\alpha_j)]XZ_j + \cos^2(\theta_j)\cos(\alpha_j)\sin(\alpha_j)YY_j + \cos(\theta_j)[\cos^2(\alpha_j) - \sin^2(\alpha_j)]YZ_j - \cos(\alpha_j)\sin(\alpha_j)ZZ_j \quad (19)$$

$$ZZR_{j-1} = ZZ_{j-1} + \sin^2(\theta_j)\sin^2(\alpha_j)XX_j + 2\cos(\theta_j)\sin(\theta_j)\sin^2(\alpha_j)XY_j + 2\sin(\theta_j)\cos(\alpha_j)\sin(\alpha_j)XZ_j + \cos^2(\theta_j)\sin^2(\alpha_j)YY_j + 2\cos(\theta_j)\cos(\alpha_j)\sin(\alpha_j)YZ_j + \cos^2(\alpha_j)ZZ_j \quad (20)$$

De esta manera, con las ecuaciones (15-20) quedarán reagrupados los parámetros  $XX_j$ ,  $XY_j$ ,  $XZ_j$ ,  $YY_j$ ,  $YZ_j$  y  $ZZ_j$

3. Eliminar  $MZ_j$  y reagrupar  $MX_j$  y  $MY_j$  utilizando la siguiente relación:

Si  $j$  es prismática y su eje  $Z_j$  es paralelo al eje Z de  $R_1$  ( $Z_{R1}$ ), para  $R_1 < j < R_2$ :

$$\begin{aligned} MXR_{j-1} &= MX_{j-1} + \cos(\theta_j)MX_j - \sin(\theta_j)MY_j \\ MYR_{j-1} &= MY_{j-1} + \sin(\theta_j)\cos(\alpha_j)MX_j + \cos(\theta_j)\cos(\alpha_j)MY_j \\ MZR_{j-1} &= MZ_{j-1} + \sin(\theta_j)\sin(\alpha_j)MX_j + \cos(\theta_j)\sin(\alpha_j)MY_j \\ ZZR_j &= ZZ_j + 2d_j\cos(\theta_j)MX_j - 2d_j\sin(\theta_j)MY_j \end{aligned}$$

4. Regrupar o eliminar uno de los parámetros  $MX_j$ ,  $MY_j$  o  $MZ_j$  si  $j$  es prismática y si su eje  $Z_j$  no es paralela al eje Z de  $R_1$  ( $Z_{Rj}$ ), para  $R_1 < j < R_2$ .

5.  $XX_j$ ,  $XY_j$ ,  $XZ_j$  y  $YZ_j$  no tienen efecto si  $\sigma_j = 0$ , para  $R_1 \leq j < R_2$  (los ejes de estas articulaciones son paralelos al eje Z de  $R_1$ ).

6. Eliminar los parámetros  $MX_j$  y  $MY_j$ , si  $\sigma_j = 0$  si  $R_1 \leq j < R_2$ , si el eje Z de esta articulación ( $Z_j$ ) se confunde con el eje Z de  $R_1$  ( $Z_{Rj}$ ), y a su vez, este eje es paralelo a la gravedad.

7. Eliminar  $MX_j$ ,  $MY_j$ ,  $MZ_j$  si  $\sigma_j=1$  y  $j=R1$ .

Cálculo de los parámetros de inercia de los motores:

8. Parámetros del cuerpo  $C_{R1}$ :

El parámetro de la inercia del motor correspondiente a R1 ( $I_{a_{R1}}$ ) es reagrupado con  $ZZ_{R1}$ , así:

$$ZZR_{R1} = ZZ_{R1} + I_{a_{R1}} \quad (21)$$

9. Parámetros del cuerpo  $C_{R2}$ :

Cuando el eje Z de R2 ( $Z_{R2}$ ) es perpendicular a  $Z_{R1}$  y cuando no existe articulación rotoide entre R1 y R2:

El parámetro de la inercia del motor correspondiente a R2 ( $I_{a_{R2}}$ ) es reagrupado con  $ZZ_{R2}$ , así:

$$ZZR_{R2} = ZZ_{R2} + I_{a_{R2}} \quad (22)$$

10. Si la primera articulación es prismática y su eje es paralelo a la gravedad:

$$MR_{R1} = M_1 + I_{a_{R1}} \quad (23)$$

11. Suponer que la distribución de masas de cada cuerpo robótico es simétrica respecto al sistema base de coordenadas de cada articulación, por lo tanto, los términos fuera de la diagonal principal de la matriz del segundo momento de inercia (3) son iguales a cero.

### Ejercicio de evaluación 1.2. Cálculo de parámetros de base

A continuación, se presenta el cálculo de los parámetros de base de los robots SCARA y cilíndrico, partiendo de las características geométricas de estos robots de cuatro grados de libertad, determinadas en la primera guía.

a) Robot SCARA:

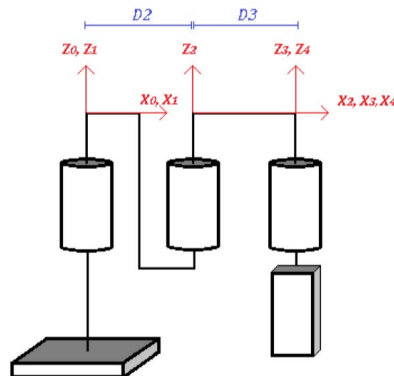


Figura 6  
Morfología del robot SCARA  
Fuente: elaboración propia.

| $i$ | $\alpha_i$ | $d_i$ | $\theta_i$ | $r_i$ | $\sigma_i$ |
|-----|------------|-------|------------|-------|------------|
| 1   | 0          | 0     | $\theta_1$ | 0     | 0          |
| 2   | 0          | D2    | $\theta_2$ | 0     | 0          |
| 3   | 0          | D3    | $\theta_3$ | 0     | 0          |
| 4   | 0          | 0     | 0          | R4    | 1          |

Tabla 2

Parámetros geométricos del Robot SCARA

Fuente: elaboración propia.

b) Robot Cilíndrico:

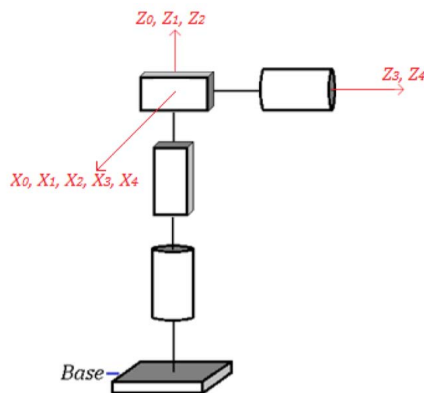


Figura 7

Morfología del Robot Cilíndrico

Fuente: elaboración propia.

| $i$ | $\alpha_i$  | $d_i$ | $\theta_i$ | $r_i$ | $\sigma_i$ |
|-----|-------------|-------|------------|-------|------------|
| 1   | 0           | 0     | $\theta_1$ | 0     | 0          |
| 2   | 0           | 0     | 0          | $R_2$ | 1          |
| 3   | $-90^\circ$ | 0     | 0          | $R_3$ | 1          |
| 4   | 0           | 0     | $\theta_4$ | 0     | 0          |

Tabla 3

Parámetros geométricos del robot cilíndrico.

Fuente: elaboración propia.

### Solución ejercicio de evaluación 1.2.

a. Robot SCARA:

Es de notar que este robot no cumple con la primera regla del juego mínimo de parámetros, es decir, no hay articulación rotoide después de R1 que tenga eje Z ( $Z_{R2}$ ) no paralelo al eje Z de R1 ( $Z_{R1}$ ). Entonces, únicamente se podrá aplicar las reglas 2 y 3, después no será posible continuar con la aplicación de las demás reglas teniendo en cuenta que dependen de la primera regla, a excepción de la regla 11.

Teniendo en cuenta que la última articulación (articulación 4) del robot SCARA es prismática, se hace uso de las ecuaciones (15) a (20), así:

·  $j = 4$

$$XXR_3 = XX_3 + XX_4$$

$$XYR_3 = XY_3 + XY_4$$

$$XZR_3 = XZ_3 - XZ_4$$

$$YYR_3 = YY_3 - YY_4$$

$$YZR_3 = YZ_3 + YZ_4$$

$$ZZR_3 = ZZ_3 + ZZ_4$$

·  $j = 3$

La articulación 3 es rotoide, por lo tanto, se hace uso de las ecuaciones (4) a (14), así:

$$XXR_3 = XX_3 - YY_3$$

Teniendo en cuenta que el parámetro  $XXR_3$  ya fue hallado en el paso anterior, se debe tener en cuenta para esta nueva expresión, así:

$$XXR_3 = (XX_3 + XX_4) - YY_3$$

$$XXR_2 = XX_2 + YY_3$$

$XYR_2 = XY_2$ , se omite la letra R, con  $XY_2$  como parámetro mínimo.

$$XZR_2 = XZ_2 - D3MZ_3$$

$$YYR_2 = YY_2 + YY_3 + D3^2M_3$$

$YZ_2$ , parámetro mínimo.

$$ZZR_2 = ZZ_2 + D3^2M_3$$

$$MXR_2 = MX_2 + D3M_3$$

$MY_2$ , parámetro mínimo.

$$MZR_2 = MZ_2 + MZ_3$$

$$MR_2 = M_2 + M_3$$

·  $j = 2$

La articulación 2 es rotoide, por lo tanto, se hace uso de las ecuaciones (4) a (14), así:

$$XXR_2 = XX_2 - YY_2 = (XX_2 + YY_3) - YY_2$$

$$XXR_1 = XX_1 + YY_2$$

$XY_1$ , parámetro mínimo.

$$XZR_1 = XZ_1 - D2MZ_2$$

$$YYR_1 = YY_1 + YY_2 + D2^2M_2$$

Teniendo en cuenta que el parámetro  $MR_2$  ya fue hallado en el paso anterior, se debe tener en cuenta para esta nueva expresión, así:

$$YYR_1 = YY_1 + YY_2 + D2^2(M_2 + M_3)$$

$YZ_1$ , parámetro mínimo.

$$ZZR_1 = ZZ_1 + D2^2(M_2 + M_3)$$

$$MXR_1 = MX_1 + D2(M_2 + M_3)$$

$MY_1$ , parámetro mínimo.

$$MZR_1 = MZ_1 + MZ_2$$

$$MR_1 = M_1 + M_2 + M_3$$

·  $j = 1$

La articulación 1 es rotoide, por lo tanto, haciendo uso de las ecuaciones (4) a (14), el único término no nulo será:

$$XXR_1 = XX_1 - YY_1 = (XX_1 + YY_2) - YY_1$$

No es posible continuar con la aplicación del juego mínimo de parámetros, teniendo en cuenta que no hay un R2 definido.

La Tabla 4 resume los parámetros mínimos del robot SCARA:

| j | $XX_j$  | $XY_j$  | $XZ_j$  | $YY_j$ | $YZ_j$  | $ZZ_j$  | $MX_j$  | $MY_j$ | $MZ_j$  | $M_j$  | $Ia_j$ |
|---|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|--------|---------|--------|--------|
| 1 | $XXR_1$ | $XY_1$  | $XZR_1$ | 0      | $YZ_1$  | $ZZR_1$ | $MXR_1$ | $MY_1$ | $MZR_1$ | $MR_1$ | $Ia_1$ |
| 2 | $XXR_2$ | $XY_2$  | $XZR_2$ | 0      | $YZ_2$  | $ZZR_2$ | $MXR_2$ | $MY_2$ | 0       | 0      | $Ia_2$ |
| 3 | $XXR_3$ | $XYR_3$ | $XZR_3$ | 0      | $YZR_3$ | $ZZR_3$ | $MX_3$  | $MY_3$ | 0       | 0      | $Ia_3$ |
| 4 | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | $MX_4$  | $MY_4$ | $MZ_4$  | $M_4$  | $Ia_4$ |

Tabla 4

Parámetros de base parciales Robot SCARA.

Fuente: elaboración propia.

Aplicando la regla 11, si se supone que la distribución de masas de cada cuerpo robótico es simétrica respecto al sistema base de coordenadas de cada articulación, los términos fuera de la diagonal principal de la matriz del segundo momento de inercia (3) serán iguales a cero, por lo tanto, en la Tabla 5 se muestran parámetros de base final para el robot SCARA.

| j | $XX_j$  | $XY_j$ | $XZ_j$ | $YY_j$ | $YZ_j$ | $ZZ_j$  | $MX_j$  | $MY_j$ | $MZ_j$  | $M_j$  | $Ia_j$ |
|---|---------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|--------|---------|--------|--------|
| 1 | $XXR_1$ | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZR_1$ | $MXR_1$ | $MY_1$ | $MZR_1$ | $MR_1$ | $Ia_1$ |
| 2 | $XXR_2$ | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZR_2$ | $MXR_2$ | $MY_2$ | 0       | 0      | $Ia_2$ |
| 3 | $XXR_3$ | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZR_3$ | $MX_3$  | $MY_3$ | 0       | 0      | $Ia_3$ |
| 4 | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       | $MX_4$  | $MY_4$ | $MZ_4$  | $M_4$  | $Ia_4$ |

Tabla 5

Parámetros de base finales robot SCARA

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, teniendo en cuenta la tabla de parámetros de base finales, se procede a ordenar los momentos de inercia del robot SCARA según las ecuaciones (2) y (3), así,

· Primer momento de inercia:

$$jFM_j = [MX_j \ MY_j \ MZ_j]^T$$

Entonces,

$$1FM_1 = [MXR_1 \ MY_1 \ MZR_1]^T; 2FM_2 = [MXR_2 \ MY_2 \ 0]^T; 3FM_3 = [MX_3 \ MY_3 \ 0]^T;$$

$$4FM_4 = [MX_4 \ MY_4 \ MZ_4]^T$$

· Segundo momento de inercia:

$$jSM_j = [XX_j \ XY_j \ XZ_j \ XY_j \ YY_j \ YZ_j \ XZ_j \ YZ_j \ ZZ_j]$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 1SM_1 &= \begin{bmatrix} XXR_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ZZR_1 \end{bmatrix}; & 2SM_2 &= \begin{bmatrix} XXR_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ZZR_2 \end{bmatrix}; \\ 3SM_3 &= \begin{bmatrix} XXR_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ZZR_3 \end{bmatrix}; & 4SM_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por otro lado, la inercia de cada motor es representada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Ia_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ia_1 \end{bmatrix}; & Ia_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ia_3 \end{bmatrix}; & Ia_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ia_3 \end{bmatrix}; \\ Ia_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ia_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Estos valores de inercia deben ser adicionados a los términos de la diagonal principal de la matriz de inercia, respectivamente.

b. Robot cilíndrico:

Siendo la articulación R1 = j1, y R2 = j4, se procede a calcular los parámetros de base para el robot cilíndrico.

Teniendo en cuenta que la última articulación (articulación 4) del robot cilíndrico es rotoide, se hace uso de las ecuaciones (4) a (14), así:

$$\cdot j = 4$$

$$XXR_4 = XX_4 - YY_4$$

$$XXR_3 = XX_3 + YY_4$$

$XY_3$ , parámetro mínimo.

$XZ_3$ , parámetro mínimo.

$$YYR_3 = YY_3 + YY_4$$

$YZ_3$ , parámetro mínimo.

$ZZ_3$ , parámetro mínimo.

$MX_3$ , parámetro mínimo.

$MY_3$ , parámetro mínimo.

$$MZR_3 = MZ_3 + MZ_4$$

$$MR_3 = M_3 + M_4$$

$$\cdot j = 3$$

La articulación 3 es prismática, por lo tanto, se hace uso de las ecuaciones (15) a (20), así:

$$XXR_2 = XX_2 + XX_3 = XX_2 + (XX_3 + YY_4)$$

$$XYR_2 = XY_2 + XZ_3$$

$$XZR_2 = XZ_2 - XY_3$$

$$YYR_2 = YY_2 + ZZ_3$$

$$YZR_2 = YZ_2 - YZ_3$$

$$ZZR_2 = ZZ_2 + YY_3$$

$$\cdot j = 2$$

La articulación 2 es prismática, por lo tanto, se hace uso de las ecuaciones (15) a (20), así:

$$XXR_1 = XX_1 + XX_2 = XX_1 + XX_2 + (XX_3 + YY_4)$$

$$XYR_1 = XY_1 + XY_2$$

$$XZR_1 = XZ_1 + XZ_2$$

$$YYR_1 = YY_1 - YY_2$$

$$YZR_1 = YZ_1 + YZ_2$$

$$ZZR_1 = ZZ_1 + ZZ_2$$

Teniendo en cuenta que  $j=2$  es prismática y su eje  $Z_2$  es paralelo al eje Z de R1 ( $Z_1$ ), para  $R1 < (j=2) < R2$  (regla 3), se puede eliminar  $MZ_2$  y reagrupar  $MX_2$  y  $MY_2$ , así:

$$MXR_1 = MX_1 + MX_2$$

$$MYR_1 = MY_1 + MY_2$$

$MZ_1$ , parámetro mínimo, pero se elimina por regla 3.

$$\cdot j = 1$$

La articulación 1 es rotoide, por lo tanto, haciendo uso de las ecuaciones (4) a (14), el único término no nulo será:

$$XXR_1 = XX_1 - YY_1 = (XX_1 + XX_2 + XX_3 + YY_4) - YY_1$$

Resumiendo, los parámetros mínimos del robot cilíndrico, hasta ahora, son:

| j | $XX_j$  | $XY_j$  | $XZ_j$  | $YY_j$ | $YZ_j$  | $ZZ_j$  | $MX_j$  | $MY_j$  | $MZ_j$  | $M_j$ | $Ia_j$ |
|---|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|--------|
| 1 | $XXR_1$ | $XYR_1$ | $XZR_1$ | 0      | $YZR_1$ | $ZZR_1$ | $MXR_1$ | $MYR_1$ | $MZ_1$  | M1    | $Ia_1$ |
| 2 | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | $MX_2$  | $MY_2$  | $MZ_2$  | M2    | $Ia_2$ |
| 3 | 0       | 0       | 0       | 0      | 0       | 0       | $MX_3$  | $MY_3$  | $MZR_3$ | 0     | $Ia_3$ |
| 4 | $XXR_4$ | $XY_4$  | $XZ_4$  | 0      | $YZ_4$  | $ZZ_4$  | $MX_4$  | $MY_4$  | 0       | 0     | $Ia_4$ |

Tabla 6

Parámetros de base Robot Cilíndrico sin aplicación de reglas.

Fuente: elaboración propia.

Aplicando las demás reglas del juego mínimo de parámetros, se tiene,

Con la regla 3:  $MX_2 = MY_2 = 0$

Con la regla 5:  $XXR_1 = XYR_1 = XZR_1 = YZR_1 = 0$

Con la regla 6:  $MXR_1 = MYR_1 = 0$

Con la regla 8 (21):  $ZZR_1 = ZZ_1 + ZZ_2 + Ia_1$

Con la regla 9 (22):  $ZZR_4 = ZZ_4 + Ia_4$

Por lo tanto, la tabla de parámetros de base del robot cilíndrico, aplicando las reglas, quedará de la siguiente manera:

| j | $XX_j$  | $XY_j$ | $XZ_j$ | $YY_j$ | $YZ_j$ | $ZZ_j$  | $MX_j$ | $MY_j$ | $MZ_j$  | $M_j$ | $Ia_j$ |
|---|---------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|-------|--------|
| 1 | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZR_1$ | 0      | 0      | $MZ_1$  | M1    | 0      |
| 2 | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       | 0      | 0      | $MZ_2$  | M2    | $Ia_2$ |
| 3 | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       | $MX_3$ | $MY_3$ | $MZR_3$ | 0     | $Ia_3$ |
| 4 | $XXR_4$ | $XY_4$ | $XZ_4$ | 0      | $YZ_4$ | $ZZ_4$  | $MX_4$ | $MY_4$ | 0       | 0     | 0      |

Tabla 7

Parámetros de base parciales Robot Cilíndrico

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, aplicando la regla 11, si se supone que la distribución de masas de cada cuerpo robótico es simétrica respecto al sistema base de coordenadas de cada articulación, los términos fuera de la diagonal principal de la matriz del segundo momento de inercia (3) serán iguales a cero, por lo tanto, en la Tabla 8 se obtiene la tabla de parámetros de base final para el Robot cilíndrico.

| j | $XX_j$  | $XY_j$ | $XZ_j$ | $YY_j$ | $YZ_j$ | $ZZ_j$  | $MX_j$ | $MY_j$ | $MZ_j$  | $M_j$ | $Ia_j$ |
|---|---------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|-------|--------|
| 1 | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZR_1$ | 0      | 0      | $MZ_1$  | M1    | 0      |
| 2 | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       | 0      | 0      | $MZ_2$  | M2    | $Ia_2$ |
| 3 | 0       | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       | $MX_3$ | $MY_3$ | $MZR_3$ | 0     | $Ia_3$ |
| 4 | $XXR_4$ | 0      | 0      | 0      | 0      | $ZZ_4$  | $MX_4$ | $MY_4$ | 0       | 0     | 0      |

Tabla 8

Parámetros de base finales Robot Cilíndrico

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, teniendo en cuenta la tabla de parámetros de base finales, se procede a ordenar los momentos de inercia del robot Cilíndrico según las ecuaciones (2) y (3), así,

· Primer momento de inercia:

$$jFM_j = [MX_j \ MY_j \ MZ_j]^T$$

Entonces,

$$1FM_1 = [0 \ 0 \ MZ_1]^T; \ 2FM_2 = [0 \ 0 \ MZ_2]^T; \ 3FM_3 = [MX_3 \ MY_3 \ MZR_3]^T;$$

$$4FM_4 = [MX_4 \ MY_4 \ 0]^T$$

· Segundo momento de inercia:

$$jSM_j = [XX_j \ XY_j \ XZ_j \ XY_j \ YY_j \ YZ_j \ XZ_j \ YZ_j \ ZZ_j]$$

Entonces,

$$1SM_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_1]; \quad 2SM_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]; \quad 3SM_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$4SM_4 = [XXR_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZ_4]$$

· Inercias tenidas en cuenta en la tabla de parámetros de base finales:

$$Ia_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ Ia_3]; \ Ia_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ Ia_3];$$

Estos valores de inercia deben ser adicionados a los términos de la diagonal principal de la matriz de inercia, respectivamente.

### Ejercicio práctico 1.2. Cálculo de parámetros de base

Determinar la tabla de parámetros de base para los siguientes robots tipo serie.

a.

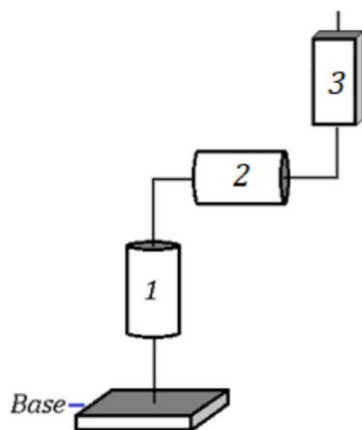


Figura 8  
Robot RRP de tres grados de libertad a.  
Fuente: elaboración propia.

b.

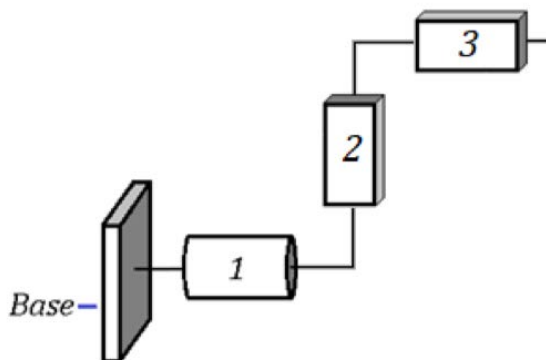


Figura 9  
Robot RRP de tres grados de libertad b.  
Fuente: elaboración propia.

## CAPÍTULO 2: Método de Lagrange

El método de LaGrange (también conocido como multiplicadores LaGrange) permite relacionar funciones de múltiples variables que se requiere maximizar o minimizar. En este caso, permite representar la parte inversa del modelo dinámico el cual depende de variables como: posiciones, velocidades, aceleraciones articulares y fuerzas, es decir, permite calcular las fuerzas sobre el órgano terminal del robot en función de la energía total del sistema. Matemáticamente se expresa con la siguiente ecuación (Vivas, 2010):

$$\Gamma_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial(E - U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (24)$$

Donde,

$E = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q}$  : energía cinética total del sistema robótico.

$U_T = \sum_{j=1}^n U_j$  : energía potencial total del sistema robótico.

Siendo, A denominada la matriz de energía cinética (Matriz de inercia)

### Energía cinética

Para poder determinar el modelo dinámico inverso mediante el método de LaGrange, en primer lugar, es necesario calcular –una a una– las energías cinéticas asociadas a cada cuerpo del robot de estudio.

La ecuación (25) expresa la fórmula matemática para calcular esta energía.

$$E_j = \frac{1}{2} [j\omega_j^T jSM_j j\omega_j + M_j jV_j^T jV_j + 2jFM_j^T (jV_j \times j\omega_j)] \quad (25)$$

Donde,

· Velocidad rotacional

$$j\omega_j = jA_{j-1}j - 1\omega_{j-1} + \underline{\sigma}_j \dot{q}_j ja_j \quad (26)$$

· Velocidad traslacional

$$jV_j = jA_{j-1}[j - 1V_{j-1} + j - 1\omega_{j-1} \times j - 1P_j] + \underline{\sigma}_j \dot{q}_j ja_j \quad (27)$$

Siendo,

· Matriz de orientación,

$${}^j-1A_j = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & s_y & n_y & a_y & s_z & n_z & a_z \end{bmatrix} \quad (28)$$

Con,

$s_x, s_y$  y  $s_z$  representan la rotación del eje X actual con respecto a X, Y, Z anteriores.

$n_x, n_y$  y  $n_z$  representan la rotación del eje Y actual con respecto a X, Y, Z anteriores.

$a_x, a_y$  y  $a_z$  representan la rotación del eje Z actual con respecto a X, Y, Z anteriores.

Hay que recordar que las matrices de transformación resultan al concatenar el vector de posición con la matriz de orientación, a través de factores de escalamiento, formando la siguiente matriz cuadrada de 4x4:

$${}^iT_j = \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z & 0 & n_x & n_y & n_z & 0 & a_x & a_y & a_z & 0 & P_x & P_y & P_z & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

·  $\sigma_j$ : Negación de  $\sigma_j$  es decir,

Si  $\sigma_j=0$  entonces  $\sigma_j=1$ , y si  $\sigma_j=1$  entonces  $\sigma_j=0$

·  $\sigma_j$ : Representa el tipo de articulación. Será igual a cero (0) si la articulación del caso es de tipo rotacional, y será igual a uno (1) si es de tipo traslacional.

·  $ja_j = [0 \ 0 \ 1]^T$ : Vector unitario según el eje Z.

Teniendo en cuenta la ecuación (25), lo primero que se requiere para calcular la energía cinética de cada cuerpo de un robot es determinar las velocidades rotacionales (26) y traslacionales (27).

A continuación, se presenta el cálculo de las velocidades rotacionales y traslacionales para cada uno de los robots del Ejercicio de evaluación 1.2.

### **Ejercicio de evaluación 2.1.1. Cálculo de velocidades rotacionales**

Determinar las velocidades rotacionales para cada uno de los cuerpos de los Robots SCARA y Cilíndrico.

### **Solución ejercicio de evaluación 2.1.1.**

A continuación, y haciendo uso de las tablas de parámetros geométricos (Tablas 2 y 3), de las matrices de transformación (30) y (31) de los robots SCARA y Cilíndrico, se procede a calcular las velocidades rotacionales, según la ecuación (26):

a) Robot SCARA:

Matrices de transformación del robot SCARA (Ruiz y Burbano, 2019):

$$\begin{aligned}
 {}^0T_1 &= [C1 \ S1 \ 0 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ ]; \\
 {}^1T_2 &= [C2 \ S2 \ 0 \ 0 \ -S2 \ C2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ D2 \ 0 \ 0 \ 1 \ ]; \\
 {}^2T_3 &= [C3 \ S3 \ 0 \ 0 \ -S3 \ C3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ D3 \ 0 \ 0 \ 1 \ ]; \\
 {}^3T_4 &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ R4 \ 1 \ ]
 \end{aligned} \tag{30}$$

Hay que recordar que, con el objetivo de minimizar la escritura de los valores de las matrices, se utilizará la siguiente notación:

$$\text{sen}\theta_1 = S1; \cos\theta_1 = C1; \text{sen}\theta_2 = S2; \cos\theta_2 = C2; \text{etc.}$$

· Para  $j = 1$

$${}^1\omega_1 = {}^1A_0\omega_0 + \underline{\sigma}_1\dot{q}_1{}^1a_1$$

La matriz  ${}^0A_1$  será la matriz de orientación contenida en la matriz de transformación  ${}^0T_1$ , así:

$${}^0A_1 = [C1 \ -S1 \ 0 \ S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ ]$$

Para obtener la  ${}^1A_0$  se deben reemplazar las filas por las columnas de la matriz  ${}^0A_1$ , como se muestra a continuación:

$${}^1A_0 = [C1 \ S1 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ ]$$

${}^0\omega_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$  teniendo en cuenta que esta velocidad rotacional corresponde a la velocidad en el instante  $t=0$ .

$\underline{\sigma}_1 = 1$ , según la Tabla 2.

Recordando que  ${}^1a_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 1 quedará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 {}^1\omega_1 &= [C1 \ S1 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][0 \ 0 \ 0] + (1)\dot{q}_1[0 \ 0 \ 1] \\
 {}^1\omega_1 &= [0 \ 0 \ \dot{q}_1]
 \end{aligned}$$

· Para  $j = 2$

$${}^2\omega_2 = {}^2A_1{}^1\omega_1 + \underline{\sigma}_2\dot{q}_2{}^2a_2$$

La matriz  $1A_2$  será la matriz de orientación contenida en la matriz de transformación  $1T_2$ , así:

$$1A_2 = [C2 \ -S2 \ 0 \ S2 \ C2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Entonces,

$$2A_1 = [C2 \ S2 \ 0 \ -S2 \ C2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$\underline{\sigma}_2 = 1$ , según la Tabla 2.

$$2a_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 2 quedará de la siguiente forma:

$$2\omega_2 = [C2 \ S2 \ 0 \ -S2 \ C2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][0 \ 0 \ \dot{q}_1] + (1)\dot{q}_2[0 \ 0 \ 1] = [0 \ 0 \ \dot{q}_1] + [0 \ 0 \ \dot{q}_2]$$

$$2\omega_2 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2]$$

· Para  $j = 3$

$$3\omega_3 = 3A_2 2\omega_2 + \underline{\sigma}_3 \dot{q}_3 3a_3$$

La matriz  $2A_3$  será la matriz de orientación contenida en la matriz de transformación  $2T_3$ , así:

$$2A_3 = [C3 \ -S3 \ 0 \ S3 \ C3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Entonces,

$$3A_2 = [C3 \ S3 \ 0 \ -S3 \ C3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$\underline{\sigma}_3 = 1$ , según la Tabla 2.

$$3a_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 3 quedará de la siguiente forma:

$$3\omega_3 = [C3 \ S3 \ 0 \ -S3 \ C3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] + (1)\dot{q}_3[0 \ 0 \ 1] = [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] + [0 \ 0 \ \dot{q}_3]$$

$$3\omega_3 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3]$$

Finalmente,

· Para  $j = 4$

$$4\omega_4 = 4A_3 3\omega_3 + \underline{\sigma}_4 \dot{q}_4 4a_4$$

La matriz  $3A_4$  será la matriz de orientación contenida en la matriz de transformación  $3T_4$ , así:

$$3A_4 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Entonces,

$$4A_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$\underline{\sigma}_4 = 1$ , según la Tabla 2.

$$4a_4 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 4 quedará de la siguiente forma:

$$4\omega_4 = [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1][0\ 0\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] + (0)\dot{q}_4[0\ 0\ 1] = [0\ 0\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] + [0\ 0\ 0]$$

$$4\omega_4 = [0\ 0\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3]$$

b) Robot Cilíndrico:

Matrices de transformación del Robot Cilíndrico (Ruiz y Burbano, 2019):

$$\begin{aligned} 0T_1 &= [C1\ S1\ 0\ 0\ -S1\ C1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]; \\ 1T_2 &= [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ R2\ 1]; \\ 2T_3 &= [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ R3\ 0\ 1]; \\ 3T_4 &= [C4\ S4\ 0\ 0\ -S4\ C4\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1] \end{aligned} \quad (31)$$

· Para  $j = 1$

$$1\omega_1 = 1A_0 0\omega_0 + \underline{\sigma}_1 \dot{q}_1 1a_1$$

La matriz  $0A_1$  será la matriz de orientación contenida en la matriz de transformación  $0T_1$ , así:

$$0A_1 = [C1\ -S1\ 0\ S1\ C1\ 0\ 0\ 0\ 1]$$

Entonces,

$$1A_0 = [C1\ S1\ 0\ -S1\ C1\ 0\ 0\ 0\ 1]$$

$\underline{\sigma}_1 = 1$ , según la Tabla 3.

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 1 quedará de la siguiente forma:

$$1\omega_1 = [C1\ S1\ 0\ -S1\ C1\ 0\ 0\ 0\ 1][0\ 0\ 0] + (1)\dot{q}_1[0\ 0\ 1] = [0\ 0\ \dot{q}_1]$$

· Para  $j = 2$

$$2\omega_2 = 2A_1 1\omega_1 + \underline{\sigma}_2 \dot{q}_2 2a_2$$

La matriz  $1A_2$  será la matriz de orientación contenida en la matriz de transformación  $1T_2$ , así:

$$1A_2 = [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1]$$

Entonces,

$$2A_1 = [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1]$$

$\underline{\sigma}_2 = 1$ , según la Tabla 3.

$$2a_2 = [0\ 0\ 1]^T$$

· Para  $j = 3$

$$3\omega_3 = 3A_2 2\omega_2 + \underline{\sigma}_3 \dot{q}_3 3a_3$$

La matriz  $2A_3$  será la matriz de orientación contenida en la matriz de transformación  $2T_3$ , así:

$$2A_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0]$$

Entonces,

$$3A_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$\underline{\sigma}_3 = 1$ , según la Tabla 3.

$$3a_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 3 quedará de la siguiente forma:

$$3\omega_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0][0 \ 0 \ \dot{q}_1] + (0)\dot{q}_3[0 \ 0 \ 1] = [0 \ -\dot{q}_1 \ 0] + [0 \ 0 \ 0]$$

$$3\omega_3 = [0 \ -\dot{q}_1 \ 0]$$

Finalmente,

· Para  $j = 4$

$$4\omega_4 = 4A_3 3\omega_3 + \underline{\sigma}_4 \dot{q}_4 4a_4$$

La matriz  $3A_4$  será la matriz de orientación contenida en la matriz de transformación  $3T_4$ , así:

$$3A_4 = [C4 \ S4 \ 0 \ -S4 \ C4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Entonces,

$$4A_3 = [C4 \ -S4 \ 0 \ S4 \ C4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$\underline{\sigma}_4 = 1$ , según la Tabla 2.

$$4a_4 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 4 quedará de la siguiente forma:

$$4\omega_4 = [C4 \ -S4 \ 0 \ S4 \ C4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][0 \ -\dot{q}_1 \ 0] + (1)\dot{q}_4[0 \ 0 \ 1] = [S4\dot{q}_1 \ -C4\dot{q}_1 \ 0] + [0 \ 0 \ \dot{q}_4]$$

$$4\omega_4 = [S4\dot{q}_1 \ -C4\dot{q}_1 \ \dot{q}_4]$$

### Ejercicio práctico 2.1.1. Cálculo de velocidades rotacionales

Determinar las velocidades rotacionales de los robots del Ejercicio práctico 1.2.

### Ejercicio de evaluación 2.1.2. Cálculo de velocidades traslacionales

Determinar las velocidades traslacionales para cada uno de los cuerpos de los Robots SCARA y Cilíndrico.

### Solución ejercicio de evaluación 2.1.2.

A continuación, haciendo uso de las tablas de parámetros geométricos (Tablas 2 y 3) y de las matrices de transformación (30) y (31) de los robots SCARA y Cilíndrico, se procede a calcular las velocidades traslacionales, según la ecuación (27).

a) Robot SCARA:

· Para  $j = 1$

$${}^1V_1 = {}^1A_0[{}^0V_0 + {}^0\omega_0 \times {}^0P_1] + \sigma_1 \dot{q}_1 {}^1a_1$$

Teniendo en cuenta que,

$${}^1A_0 = [C1 \ S1 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

${}^0\omega_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$  teniendo en cuenta que esta velocidad traslacional corresponde a la velocidad en el instante  $t=0$ .

$${}^0\omega_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

${}^0P_1 = [0 \ 0 \ 0]$ , corresponde al vector punto contenido en la matriz de transformación  ${}^0T_1$

$\sigma_1 = 0$ , según la Tabla 2.

$${}^1a_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 1 quedará de la siguiente forma:

$${}^1V_1 = [C1 \ S1 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][[0 \ 0 \ 0] + [0 \ 0 \ 0] \times [0 \ 0 \ 0]] + (0)\dot{q}_1[0 \ 0 \ 1]$$

$${}^1V_1 = [0 \ 0 \ 0]$$

· Para  $j = 2$

$${}^2V_2 = {}^2A_1[{}^1V_1 + {}^1\omega_1 \times {}^1P_2] + \sigma_2 \dot{q}_2 {}^2a_2$$

Teniendo en cuenta que,

$${}^2A_1 = [C2 \ S2 \ 0 \ -S2 \ C2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$1P_2 = [D2 \ 0 \ 0]$ , corresponde al vector punto contenido en la matriz de transformación  $1T_2$   
 $\sigma_2=0$ , según la Tabla 2.

$$2a_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 2 quedará de la siguiente forma:

$$2V_2 = [C2 \ S2 \ 0 \ -S2 \ C2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] [[0 \ 0 \ 0] + [0 \ 0 \ \dot{q}_1] \times [D2 \ 0 \ 0]] + (0)\dot{q}_2[0 \ 0 \ 1]$$

El primer paso para resolver la ecuación es realizar el producto cruz entre los dos vectores, así:

Por lo tanto,

$$[0 \ 0 \ \dot{q}_1] \times [D2 \ 0 \ 0] = [0 \ D2 \ 0 \ \dot{q}_1]$$

Entonces,

$$2V_2 = [C2 \ S2 \ 0 \ -S2 \ C2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] [[0 \ 0 \ 0] + [0 \ D2 \ 0 \ \dot{q}_1]] + (0)\dot{q}_2[0 \ 0 \ 1]$$

$$2V_2 = [C2 \ S2 \ 0 \ -S2 \ C2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] [0 \ D2 \ \dot{q}_1 \ 0]$$

$$2V_2 = [D2S2\dot{q}_1 \ D2C2\dot{q}_1 \ 0]$$

· Para  $j = 3$

$$3V_3 = 3A_2[2V_2 + 2\omega_2 \times 2P_3] + \sigma_3\dot{q}_3 3a_3$$

Teniendo en cuenta que,

$$3A_2 = [C3 \ S3 \ 0 \ -S3 \ C3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$2P_3 = [D3 \ 0 \ 0]$ , corresponde al vector punto contenido en la matriz de transformación  $2T_3$

$\sigma_3 = 0$ , según la Tabla 2.

$$3a_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 3 quedará de la siguiente forma:

$$3V_3 = [C3 \ S3 \ 0 \ -S3 \ C3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] [[D2S2\dot{q}_1 \ D2C2\dot{q}_1 \ 0] + [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] \times [D3 \ 0 \ 0]] + (0)\dot{q}_3[0 \ 0 \ 1]$$

Resolviendo el producto cruz entre los dos vectores,

$$\begin{aligned} [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] \times [D3 \ 0 \ 0] &= [\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k} \ 0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \ D3 \ 0 \ 0] \\ |\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k} \ 0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \ D3 \ 0 \ 0| &= [(0)(0) - (0)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)]\hat{i} - [(0)(0) - (D3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)]\hat{j} + [(0)(0) - (D3)(0)]\hat{k} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] \times [D3 \ 0 \ 0] = [0 \ D3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0]$$

Entonces,

$$3V_3 = [C3 \ S3 \ 0 \ -S3 \ C3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] [[D2S2\dot{q}_1 \ D2C2\dot{q}_1 \ 0] + [0 \ D3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0]] + (0)\dot{q}_3[0 \ 0 \ 1]$$

$$3V_3 = [C3 \ S3 \ 0 \ -S3 \ C3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] [D2S2\dot{q}_1 \ D2C2\dot{q}_1 + D3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0]$$

$$3V_3 = [D2S2C3\dot{q}_1 + D2C2S3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ -D2S2S3\dot{q}_1 + D2C2C3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0]$$

$$3V_3 = [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0]$$

Con,

$$S2,3 = \text{sen}(\theta_2 + \theta_3) = S2C3 + C2S3$$

$$C2,3 = \text{cos}(\theta_2 + \theta_3) = C2C3 - S2S3$$

· Para  $j = 4$

$$4V_4 = 4A_3[3V_3 + 3\omega_3 \times 3P_4] + \sigma_4\dot{q}_4 4a_4$$

Teniendo en cuenta que,

$$4A_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$3P_4 = [0 \ 0 \ R4]$ , corresponde al vector punto contenido en la matriz de transformación  $3T_4$

$\sigma_4 = 1$ , según la Tabla 2.

$$4a_4 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 3 quedará de la siguiente forma:

$$4V_4 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] [[D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0] + [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] \times [0 \ 0 \ R4]] + (1)\dot{q}_4[0 \ 0 \ 1]$$

Resolviendo el producto cruz entre los dos vectores,

$$[0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] \times [0 \ 0 \ R4] = [\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k} \ 0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \ 0 \ 0 \ R4]$$

$$[\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k} \ 0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \ 0 \ 0 \ R4] = [(0)(R4) - (0)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)]\hat{i}$$

$$- [(0)(R4) - (0)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)]\hat{j} + [(0)(0) - (0)(0)]\hat{k}$$

Entonces,

$$[0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] \times [0 \ 0 \ R4] = [0 \ 0 \ 0]$$

Por lo tanto,

$$4V_4 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \left[ [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0] + [0 \ 0 \ 0] \right] + [0 \ 0 \ \dot{q}_4]$$

$$4V_4 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0] + [0 \ 0 \ \dot{q}_4]$$

$$4V_4 = [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0] + [0 \ 0 \ \dot{q}_4]$$

Finalmente,

$$4V_4 = [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ \dot{q}_4]$$

b) Robot Cilíndrico:

· Para  $j = 1$

$$1V_1 = 1A_0[0V_0 + 0\omega_0 \times 0P_1] + \sigma_1\dot{q}_1 1a_1$$

Teniendo en cuenta que,

$$1A_0 = [C1 \ S1 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$0V_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$  teniendo en cuenta que esta velocidad traslacional corresponde a la velocidad en el instante  $t = 0$

$$0V_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$0P_1 = [0 \ 0 \ 0]$  corresponde al vector punto contenido en la matriz de transformación  $0T_1$

$\sigma_1 = 0$ , según la Tabla 3.

$$1a_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 1 quedará de la siguiente forma:

$$1V_1 = [C1 \ S1 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \left[ [0 \ 0 \ 0] + [0 \ 0 \ 0] \times [0 \ 0 \ 0] \right] + (0)\dot{q}_1[0 \ 0 \ 1]$$

$$1V_1 = [0 \ 0 \ 0]$$

· Para  $j = 2$

$$2V_2 = 2A_1[1V_1 + 1\omega_1 \times 1P_2] + \sigma_2\dot{q}_2 2a_2$$

Teniendo en cuenta que,

$$2A_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$1P_2 = [0 \ 0 \ R2]$  corresponde al vector punto contenido en la matriz de transformación  $1T_2$

$\sigma_2 = 1$ , según la Tabla 3.

$$2a_2 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 2 quedará de la siguiente forma:

$$2V_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] [[0 \ 0 \ 0] + [0 \ 0 \ \dot{q}_1] \times [0 \ 0 \ R2]] + (1)\dot{q}_2[0 \ 0 \ 1]$$

El primer paso para resolver la ecuación es realizar el producto cruz entre los dos vectores, así:

$$[0 \ 0 \ \dot{q}_1] \times [0 \ 0 \ R2] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{q}_1 \\ 0 & 0 & R2 \end{vmatrix} = [(0)(R2) - (0)\dot{q}_1]\hat{i} - [(0)(R2) - (0)\dot{q}_1]\hat{j} + [(0)(0) - (0)(0)]\hat{k}$$

Por lo tanto,

$$[0 \ 0 \ \dot{q}_1] \times [0 \ 0 \ R2] = [0 \ 0 \ 0]$$

Entonces,

$$2V_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] [[0 \ 0 \ 0] + [0 \ 0 \ 0]] + (1)\dot{q}_2[0 \ 0 \ 1]$$

$$2V_2 = [0 \ 0 \ \dot{q}_2]$$

· Para  $j = 3$

$$3V_3 = 3A_2[2V_2 + 2\omega_2 \times 2P_3] + \sigma_3\dot{q}_3 3a_3$$

Teniendo en cuenta que,

$$3A_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$2P_3 = [0 \ R3 \ 0]$ , corresponde al vector punto contenido en la matriz de transformación  $2T_3$

$\sigma_3 = 1$ , según la Tabla 2.

$$3a_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 3 quedará de la siguiente forma:

$$3V_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0] [[0 \ 0 \ \dot{q}_2] + [0 \ 0 \ \dot{q}_1] \times [0 \ R3 \ 0]] + (1)\dot{q}_3[0 \ 0 \ 1]$$

Resolviendo el producto cruz entre los dos vectores,

$$[0 \ 0 \ \dot{q}_1] \times [0 \ R3 \ 0] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{q}_1 \\ 0 & R3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{q}_1 \\ 0 & R3 & 0 \end{vmatrix} = [(0)(0) - (R3)(\dot{q}_1)]\hat{i} - [(0)(0) - (0)(\dot{q}_1)]\hat{j} + [(0)(R3) - (0)(0)]\hat{k}$$

Por lo tanto,

$$[0 \ 0 \ \dot{q}_1] \times [0 \ R3 \ 0] = [-R3\dot{q}_1 \ 0 \ 0]$$

Entonces,

$$3V_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0] [[0 \ 0 \ \dot{q}_2] + [-R3\dot{q}_1 \ 0 \ 0]] + (1)\dot{q}_3[0 \ 0 \ 1]$$

$$3V_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0] [-R3\dot{q}_1 \ 0 \ \dot{q}_2] + [0 \ 0 \ \dot{q}_3]$$

$$3V_3 = [-R3\dot{q}_1 \ -\dot{q}_2 \ 0] + [0 \ 0 \ \dot{q}_3]$$

$$3V_3 = [-R3\dot{q}_1 \ -\dot{q}_2 \ \dot{q}_3]$$

· Para  $j = 4$

$$4V_4 = 4A_3[3V_3 + 3\omega_3 \times 3P_4] + \sigma_4 \dot{q}_4 4a_4$$

Teniendo en cuenta que,

$$4A_3 = [C4 \ S4 \ 0 \ -S4 \ C4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$3P_4 = [0 \ 0 \ 0]$ , corresponde al vector punto contenido en la matriz de transformación  $3T_4$

$\sigma_4 = 0$ , según la Tabla 3.

$$4a_4 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Por lo tanto, la velocidad rotacional para el cuerpo 3 quedará de la siguiente forma:

$$4V_4 = [C4 \ S4 \ 0 \ -S4 \ C4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][[-R3\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \ \dot{q}_3] + [0 \ -\dot{q}_1 \ 0] \times [0 \ 0 \ 0]] + (0)\dot{q}_4[0 \ 0 \ 1]$$

Resolviendo el producto cruz entre los dos vectores,

$$[0 \ -\dot{q}_1 \ 0] \times [0 \ 0 \ 0] = [0 \ 0 \ 0]$$

Por lo tanto,

$$4V_4 = [C4 \ S4 \ 0 \ -S4 \ C4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][[-R3\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \ \dot{q}_3] + [0 \ 0 \ 0]] + [0 \ 0 \ 0]$$

$$4V = [C4 \ S4 \ 0 \ -S4 \ C4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][[-R3\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]$$

$$4V_4 = [-R3C4\dot{q}_1 - S4\dot{q}_2 \ R3S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_2 \ \dot{q}_3]$$

### **Ejercicio práctico 2.1.2. Cálculo de velocidades traslacionales**

Determinar las velocidades traslacionales de los robots del Ejercicio práctico 1.2.

### **Ejercicio de evaluación 2.1.3. Cálculo de energía cinética**

Determinar la energía cinética de cada uno de los cuerpos de los Robots SCARA y Cilíndrico, teniendo en cuenta los resultados parciales de los Ejercicios de evaluación 1.2., 2.1.1. y 2.1.2.

### **Solución ejercicio de evaluación 2.1.3.**

A continuación, haciendo uso de las tablas de parámetros de base (Tablas 5 y 8), de las velocidades rotacionales y traslacionales de los robots SCARA y Cilíndrico, se procede a calcular la energía cinética, según la ecuación (25).

a) Robot SCARA:

· Para  $j = 1$

$$E_1 = \frac{1}{2} [1\omega_1^T 1SM_1 1\omega_1 + M_1 1V_1^T 1V_1 + 21FM_1^T (1V_1 \times 1\omega_1)]$$

Teniendo en cuenta que,

$$1\omega_1 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1]$$

$$1V_1 = [0 \ 0 \ 0]$$

$$1SM_1 = [XXR_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_1]$$

$$M_1 = MR_1$$

$$1FM_1 = [MXR_1 \ MY_1 \ MZR_1]^T$$

Entonces,

$$E_1 = \frac{1}{2} [[0 \ 0 \ \dot{q}_1] [XXR_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_1] [0 \ 0 \ \dot{q}_1] + MR_1 [0 \ 0 \ 0] [0 \ 0 \ 0] + 2[MXR_1 \ MY_1 \ MZR_1] ([0 \ 0 \ 0] \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1])]$$

Eliminando términos que multiplican por cero,

$$E_1 = \frac{1}{2} [[0 \ 0 \ \dot{q}_1] [XXR_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_1] [0 \ 0 \ \dot{q}_1]]$$

$$E_1 = \frac{1}{2} [[0 \ 0 \ ZZR_1 \dot{q}_1] [0 \ 0 \ \dot{q}_1]]$$

Por lo tanto,

$$E_1 = \frac{1}{2} ZZR_1 \dot{q}_1^2$$

· Para  $j = 2$

$$E_2 = \frac{1}{2} [2\omega_2^T 2SM_2 2\omega_2 + M_2 2V_2^T 2V_2 + 22FM_2^T (2V_2 \times 2\omega_2)]$$

Teniendo en cuenta que,

$$2\omega_2 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2]$$

$$2V_2 = [D2S2\dot{q}_1 \ D2C2\dot{q}_1 \ 0]$$

$$2SM_2 = [XXR_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_2]$$

$$M_2 = 0$$

$$2FM_2 = [MXR_2 \ MY_2 \ 0]^T$$

Entonces,

$$E_2 = \frac{1}{2} [[0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] [XXR_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_2] [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ + 2[MXR_2 \ MY_2 \ 0] [(D2S2\dot{q}_1 \ D2C2\dot{q}_1 \ 0) \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2]]]$$

Resolviendo el producto cruz,

$$[D2S2\dot{q}_1 \ D2C2\dot{q}_1 \ 0] \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] = [\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k} \ 2S2\dot{q}_1 \ D2C2\dot{q}_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ |\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k} \ 2S2\dot{q}_1 \ D2C2\dot{q}_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2| = [(D2C2\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - (0)(0)]\hat{i} \\ - [(2S2\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - (0)(0)]\hat{j} + [(2S2\dot{q}_1)(0) - (0)(D2C2\dot{q}_1)]\hat{k}$$

$$[D2S2\dot{q}_1 \ D2C2\dot{q}_1 \ 0] \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] = [(D2C2\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - (2S2\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0 \ 0]$$

Luego,

$$E_2 = \frac{1}{2} [[0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] [XXR_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_2] [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ + 2[MXR_2 \ MY_2 \ 0] [(D2C2\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - (2S2\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0 \ 0]]]$$

$$E_2 = \frac{1}{2} [[0 \ 0 \ ZZR_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ + [2MXR_2 \ 2MY_2 \ 0] [(D2C2\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - (2S2\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0 \ 0]]]$$

Por lo tanto,

$$E_2 = \frac{1}{2} ZZR_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + MXR_2(D2C2\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - MY_2(2S2\dot{q}_1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

Finalmente,

$$E_2 = \frac{1}{2} ZZR_2\dot{q}_1^2 + ZZR_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2} ZZR_2\dot{q}_2^2 + D2MXR_2C2\dot{q}_1^2 + D2MXR_2C2\dot{q}_1\dot{q}_2 - 2MY_2S2\dot{q}_1^2 \\ - 2MY_2S2\dot{q}_1\dot{q}_2$$

· Para  $j = 3$

$$E_3 = \frac{1}{2} [3\omega_3^T 3SM_3 \ 3\omega_3 + M_3 3V_3^T 3V_3 + 23FM_3^T (3V_3 \times 3\omega_3)]$$

Teniendo en cuenta que,

$$3\omega_3 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3]$$

$$3V_3 = [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0]$$

$$3SM_3 = [XXR_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_3]$$

$$M_3 = 0$$

$$3FM_3 = [MX_3 \ MY_3 \ 0]^T$$

Entonces,

$$E_3 = \frac{1}{2} \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{bmatrix} [XXR_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + 2[MX_3 \ MY_3 \ 0]([D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0] \right. \\ \left. \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3]) \right]$$

Resolviendo el producto cruz,

$$\begin{aligned} & [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0] \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] \\ &= [\hat{i} \hat{j} \hat{k} \ D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0 \ 0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] \\ & \quad [(D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - (0)(0)]\hat{i} \\ & \quad - [(D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - (0)(0)]\hat{j} \\ & \quad + [(D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(0) - (0)(D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))]\hat{k} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0] \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] \\ &= [(D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ & \quad - (D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \ 0] \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{2} \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{bmatrix} [XXR_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{bmatrix} \right. \\ & \quad + 2[MX_3 \ MY_3 \ 0] \left[ \begin{bmatrix} D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\ E_3 &= \frac{1}{2} \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & ZZR_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{bmatrix} \right. \\ & \quad + [2MX_3 \ 2MY_3 \ 0] \begin{bmatrix} (D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ - (D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{2} \left[ (ZZR_3\dot{q}_1 + ZZR_3\dot{q}_2 + ZZR_3\dot{q}_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + (2MX_3D2C2,3\dot{q}_1 \right. \\ & \quad + 2MX_3D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ & \quad \left. - (2MY_3D2S2,3\dot{q}_1 + 2MY_3D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right] \\ E_3 &= \frac{1}{2} \left[ (ZZR_3\dot{q}_1 + ZZR_3\dot{q}_2 + ZZR_3\dot{q}_3)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + (2MX_3D2C2,3\dot{q}_1 \right. \\ & \quad + 2MX_3D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ & \quad \left. - (2MY_3D2S2,3\dot{q}_1 + 2MY_3D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right] \end{aligned}$$

Finalmente,

$$E_3 = \frac{1}{2} ZZR_3 \dot{q}_1^2 + ZZR_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + ZZR_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \frac{1}{2} ZZR_3 \dot{q}_2^2 + ZZR_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \frac{1}{2} ZZR_3 \dot{q}_3^2 \\ + D2MX_3 C2,3 \dot{q}_1^2 + D2MX_3 C2,3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + D2MX_3 C2,3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + D3MX_3 C3 \dot{q}_1^2 \\ + 2D3MX_3 C3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + D3MX_3 C3 \dot{q}_2^2 + D3MX_3 C3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + D3MX_3 C3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\ - D2MY_3 S2,3 \dot{q}_1^2 - D2MY_3 S2,3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - D2MY_3 S2,3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 - D3MY_3 S3 \dot{q}_1^2 \\ - 2D3MY_3 S3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - D3MY_3 S3 \dot{q}_2^2 - D3MY_3 S3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 - D3MY_3 S3 \dot{q}_2 \dot{q}_3$$

· Para  $j = 4$

$$E_4 = \frac{1}{2} [4\omega_4^T 4SM_4 4\omega_4 + M_4 4V_4^T 4V_4 + 24FM_4^T (4V_4 \times 4\omega_4)]$$

Teniendo en cuenta que,

$$4\omega_4 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3]$$

$$4V_4 = [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ \dot{q}_4]$$

$$4SM_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$4FM_4 = [MX_4 \ MY_4 \ MZ_4]^T$$

Entonces,

$$E_4 = \frac{1}{2} [[0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] + M_4 [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ \dot{q}_4] [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ \dot{q}_4] \\ [D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ \dot{q}_4] \\ + 2[MX_4 \ MY_4 \ MZ_4] ([D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ \dot{q}_4] \\ \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3])] ]$$

Resolviendo el producto cruz,

$$[D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ \dot{q}_4] \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] \\ = [\hat{i} \hat{j} \hat{k} \ D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ \dot{q}_4 \ 0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] \\ [(D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - (0)(\dot{q}_4)]\hat{i} \\ - [(D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - (0)(\dot{q}_4)]\hat{j} \\ + [(D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(0) - (0)(D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))]\hat{k}$$

Entonces,

$$[D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \ 0] \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] \\ = [(D2C2,3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ - (D2S2,3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \ 0]$$

Luego,

$$E_4 = \frac{1}{2} \left[ [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3] + M_4 [D2S2, 3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) D2C2, 3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_4] \right. \\ \left. + 2[MX_4 \ MY_4 \ MZ_4] [(D2C2, 3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - (D2S2, 3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \ 0] \right]$$

$$E_4 = \frac{1}{2} \left[ [D2M_4S2, 3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) D2M_4C2, 3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) M_4\dot{q}_4] [D2S2, 3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) D2C2, 3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_4] \right. \\ \left. + [2MX_4 \ 2MY_4 \ 2MZ_4] [(D2C2, 3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - (D2S2, 3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2))(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \ 0] \right]$$

$$E_4 = \frac{1}{2} \left[ [D2M_4S2, 3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] [D2S2, 3\dot{q}_1 + D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] \right. \\ \left. + [D2M_4C2, 3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] [D2C2, 3\dot{q}_1 + D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] + M_4\dot{q}_4^2 \right. \\ \left. + [2MX_4D2C2, 3\dot{q}_1 + 2MX_4D3C3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - [2MY_4D2S2, 3\dot{q}_1 + 2MY_4D3S3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right]$$

Finalmente,

$$E_4 = \frac{1}{2} D2^2 M_4 S2, 3^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} D2D3M_4 S3S2, 3\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} D2D3M_4 S3S2, 3\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2} D2D3S3S2, 3\dot{q}_1^2 \\ + \frac{1}{2} D2D3S3S2, 3\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2} D3^2 S3^2 \dot{q}_1^2 + D3^2 S3^2 \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2} D3^2 S3^2 \dot{q}_2^2 \\ + \frac{1}{2} D2^2 M_4 C2, 3^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} D2D3M_4 C3C2, 3\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} D2D3M_4 C3C2, 3\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ + \frac{1}{2} D2D3C3C2, 3\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} D2D3C3C2, 3\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2} D3^2 C3^2 \dot{q}_1^2 + D3^2 C3^2 \dot{q}_1\dot{q}_2 \\ + \frac{1}{2} D3^2 C3^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} M_4 \dot{q}_4^2 + D2MX_4 C2, 3\dot{q}_1^2 + D2MX_4 C2, 3\dot{q}_1\dot{q}_2 + D2MX_4 C2, 3\dot{q}_1\dot{q}_3 \\ + D3MX_4 C3\dot{q}_1^2 + 2D3MX_4 C3\dot{q}_1\dot{q}_2 + D3MX_4 C3\dot{q}_2^2 + D3MX_4 C3\dot{q}_1\dot{q}_3 \\ + D3MX_4 C3\dot{q}_2\dot{q}_3 - D2MY_4 S2, 3\dot{q}_1^2 - D2MY_4 S2, 3\dot{q}_1\dot{q}_2 - D2MY_4 S2, 3\dot{q}_1\dot{q}_3 \\ - D3MY_4 S3\dot{q}_1^2 - 2D3MY_4 S3\dot{q}_1\dot{q}_2 - D3MY_4 S3\dot{q}_2^2 - D3MY_4 S3\dot{q}_1\dot{q}_3 - D3MY_4 S3\dot{q}_2\dot{q}_3$$

· Robot Cilíndrico:

· Para  $j = 1$

$$E_1 = \frac{1}{2} [1\omega_1^T 1SM_1 1\omega_1 + M_1 1V_1^T 1V_1 + 21FM_1^T (1V_1 \times 1\omega_1)]$$

Teniendo en cuenta que,

$$1\omega_1 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1]$$

$$1V_1 = [0 \ 0 \ 0]$$

$$1SM_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_1]$$

$$M_1$$

$$1FM_1 = [0 \ 0 \ MZ_1]^T$$

Entonces,

$$E_1 = \frac{1}{2} [[0 \ 0 \ \dot{q}_1][0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_1][0 \ 0 \ \dot{q}_1] + M_1[0 \ 0 \ 0][0 \ 0 \ 0] + 2[0 \ 0 \ MZ_1]([0 \ 0 \ 0] \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1])]$$

Eliminando términos que multiplican por cero,

$$E_1 = \frac{1}{2} [[0 \ 0 \ \dot{q}_1][0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZR_1][0 \ 0 \ \dot{q}_1]]$$

$$E_1 = \frac{1}{2} [[0 \ 0 \ ZZR_1 \dot{q}_1][0 \ 0 \ \dot{q}_1]]$$

Por lo tanto,

$$E_1 = \frac{1}{2} ZZR_1 \dot{q}_1^2$$

· Para  $j = 2$

$$E_2 = \frac{1}{2} [2\omega_2^T 2SM_2 2\omega_2 + M_2 2V_2^T 2V_2 + 22FM_2^T (2V_2 \times 2\omega_2)]$$

Teniendo en cuenta que,

$$2\omega_2 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1]$$

$$2V_2 = [0 \ 0 \ \dot{q}_2]$$

$$2SM_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$M_2$$

$$2FM_2 = [0 \ 0 \ MZ_2]^T$$

Entonces,

$$E_2 = \frac{1}{2} [ [0 \ 0 \ \dot{q}_1] [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] [0 \ 0 \ \dot{q}_1] + M_2 [0 \ 0 \ \dot{q}_2] [0 \ 0 \ \dot{q}_2] + 2 [0 \ 0 \ MZ_2] ([0 \ 0 \ \dot{q}_2] \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1]) ]$$

Resolviendo el producto cruz,

$$[0 \ 0 \ \dot{q}_2] \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1] = \hat{i} \hat{j} \hat{k} \ 0 \ 0 \ \dot{q}_2 \ 0 \ 0 \ \dot{q}_1$$

$$|\hat{i} \hat{j} \hat{k} \ 0 \ 0 \ \dot{q}_2 \ 0 \ 0 \ \dot{q}_1| = [(0)(\dot{q}_1) - (0)(\dot{q}_2)]\hat{i} - [(0)(\dot{q}_1) - (0)(\dot{q}_2)]\hat{j} + [(0)(0) - (0)(0)]\hat{k}$$

Entonces,

$$[0 \ 0 \ \dot{q}_2] \times [0 \ 0 \ \dot{q}_1] = [0 \ 0 \ 0]$$

Luego,

$$E_2 = \frac{1}{2} [ [0 \ 0 \ \dot{q}_1] [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] [0 \ 0 \ \dot{q}_1] + M_2 [0 \ 0 \ \dot{q}_2] [0 \ 0 \ \dot{q}_2] + 2 [0 \ 0 \ MZ_2] [0 \ 0 \ 0] ]$$

$$E_2 = \frac{1}{2} [ M_2 [0 \ 0 \ \dot{q}_2] [0 \ 0 \ \dot{q}_2] ]$$

Finalmente,

$$E_2 = \frac{1}{2} M_2 \dot{q}_2^2$$

· Para  $j = 3$

$$E_3 = \frac{1}{2} [ 3\omega_3^T 3SM_3 3\omega_3 + M_3 3V_3^T 3V_3 + 23FM_3^T (3V_3 \times 3\omega_3) ]$$

Teniendo en cuenta que,

$$3\omega_3 = [0 \ -\dot{q}_1 \ 0]$$

$$3V_3 = [-R3\dot{q}_1 \ -\dot{q}_2 \ \dot{q}_3]$$

$$3SM_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$M_3 = 0$$

$$3FM_3 = [MX_3 \ MY_3 \ MZR_3]^T$$

Entonces,

$$E_3 = \frac{1}{2} [ [0 \ -\dot{q}_1 \ 0] [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] [0 \ -\dot{q}_1 \ 0] + 2 [MX_3 \ MY_3 \ MZR_3] ([-R3\dot{q}_1 \ -\dot{q}_2 \ \dot{q}_3] \times [0 \ -\dot{q}_1 \ 0]) ]$$

Resolviendo el producto cruz,

$$[-R3\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \dot{q}_3] \times [0 - \dot{q}_1 0] = |\hat{i} \hat{j} \hat{k} - R3\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \dot{q}_3 0 - \dot{q}_1 0|$$

$$[(-\dot{q}_2)(0) - (-\dot{q}_1)(\dot{q}_3)]\hat{i} - [(-R3\dot{q}_1)(0) - (0)(\dot{q}_3)]\hat{j} + [(-R3\dot{q}_1)(-\dot{q}_1) - (0)(-\dot{q}_2)]\hat{k}$$

Entonces,

$$[-R3\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \dot{q}_3] \times [0 - \dot{q}_1 0] = [\dot{q}_1 \dot{q}_3 0 R3\dot{q}_1^2]$$

Entonces,

$$E_3 = \frac{1}{2} [ [0 - \dot{q}_1 0] [0 0 0 0 0 0 0 0] [0 - \dot{q}_1 0] + 2 [MX_3 MY_3 MZR_3] [\dot{q}_1 \dot{q}_3 0 R3\dot{q}_1^2] ]$$

$$E_3 = \frac{1}{2} [ 2 [MX_3 MY_3 MZR_3] [\dot{q}_1 \dot{q}_3 0 R3\dot{q}_1^2] ]$$

Finalmente,

$$E_3 = MX_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + R3MZR_3 \dot{q}_1^2$$

· Para  $j = 4$

$$E_4 = \frac{1}{2} [ 4\omega_4^T 4SM_4 4\omega_4 + M_4 4V_4^T 4V_4 + 24FM_4^T (4V_4 \times 4\omega_4) ]$$

Teniendo en cuenta que,

$$4\omega_4 = [S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_1 \dot{q}_4]$$

$$4V_4 = [-R3C4\dot{q}_1 - S4\dot{q}_2 R3S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_2 \dot{q}_3]$$

$$4SM_4 = [XXR_4 0 0 0 0 0 0 0 ZZ_4]$$

$$4FM_4 = [MX_4 MY_4 0]^T$$

$$M_4 = 0$$

Entonces,

$$E_4 = \frac{1}{2} [ [S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_1 \dot{q}_4] [XXR_4 0 0 0 0 0 0 0 ZZ_4] [S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_1 \dot{q}_4] + 2 [MX_4 MY_4 0] ([-R3C4\dot{q}_1 - S4\dot{q}_2 R3S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_2 \dot{q}_3] \times [S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_1 \dot{q}_4]) ]$$

Resolviendo el punto cruz,

$$[-R3C4\dot{q}_1 - S4\dot{q}_2 R3S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_2 \dot{q}_3] \times [S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_1 \dot{q}_4]$$

$$= |\hat{i} \hat{j} \hat{k} - R3C4\dot{q}_1 - S4\dot{q}_2 R3S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_2 \dot{q}_3 S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_1 \dot{q}_4| =$$

$$[(R3S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_2)(\dot{q}_4) - (-C4\dot{q}_1)(\dot{q}_3)]\hat{i} - [(-R3C4\dot{q}_1 - S4\dot{q}_2)(\dot{q}_4) - (S4\dot{q}_1)(\dot{q}_3)]\hat{j}$$

$$+ [(-R3C4\dot{q}_1 - S4\dot{q}_2)(-C4\dot{q}_1) - (S4\dot{q}_1)(R3S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_2)]\hat{k}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 & [-R3C4\dot{q}_1 - S4\dot{q}_2 R3S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_2 \dot{q}_3] \times [S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_1 \dot{q}_4] \\
 & = [(R3S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_2)(\dot{q}_4) - (-C4\dot{q}_1)(\dot{q}_3)(R3C4\dot{q}_1 + S4\dot{q}_2)(\dot{q}_4) \\
 & \quad + (S4\dot{q}_1)(\dot{q}_3)(-R3C4\dot{q}_1 - S4\dot{q}_2)(-C4\dot{q}_1) - (S4\dot{q}_1)(R3S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_2)] \\
 & [-R3C4\dot{q}_1 - S4\dot{q}_2 R3S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_2 \dot{q}_3] \times [S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_1 \dot{q}_4] \\
 & = [R3S4\dot{q}_1 \dot{q}_4 - C4\dot{q}_2 \dot{q}_4 + C4\dot{q}_1 \dot{q}_3 R3C4\dot{q}_1 \dot{q}_4 + S4\dot{q}_2 \dot{q}_4 + S4\dot{q}_1 \dot{q}_3 R3C4^2 \dot{q}_1^2 \\
 & \quad + S4C4\dot{q}_1 \dot{q}_2 - R3S4^2 \dot{q}_1^2 + S4C4\dot{q}_1 \dot{q}_2]
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 E_4 &= \frac{1}{2} \left[ [S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_1 \dot{q}_4] [XXR_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ ZZ_4] [S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_1 \dot{q}_4] \right. \\
 & \quad + 2[MX_4 \ MY_4 \ 0] [R3S4\dot{q}_1 \dot{q}_4 - C4\dot{q}_2 \dot{q}_4 + C4\dot{q}_1 \dot{q}_3 R3C4\dot{q}_1 \dot{q}_4 + S4\dot{q}_2 \dot{q}_4 \\
 & \quad \left. + S4\dot{q}_1 \dot{q}_3 R3C4^2 \dot{q}_1^2 + S4C4\dot{q}_1 \dot{q}_2 - R3S4^2 \dot{q}_1^2 + S4C4\dot{q}_1 \dot{q}_2] \right] \\
 E_4 &= \frac{1}{2} \left[ [XXR_4 S4\dot{q}_1 \ 0 \ ZZ_4 \dot{q}_4] [S4\dot{q}_1 - C4\dot{q}_1 \dot{q}_4] \right. \\
 & \quad + [2MX_4 \ 2MY_4 \ 0] [R3S4\dot{q}_1 \dot{q}_4 - C4\dot{q}_2 \dot{q}_4 + C4\dot{q}_1 \dot{q}_3 R3C4\dot{q}_1 \dot{q}_4 + S4\dot{q}_2 \dot{q}_4 \\
 & \quad \left. + S4\dot{q}_1 \dot{q}_3 R3C4^2 \dot{q}_1^2 + S4C4\dot{q}_1 \dot{q}_2 - R3S4^2 \dot{q}_1^2 + S4C4\dot{q}_1 \dot{q}_2] \right]
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 E_4 &= \frac{1}{2} XXR_4 S4^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} ZZ_4 \dot{q}_4^2 + R3MX_4 S4\dot{q}_1 \dot{q}_4 - MX_4 C4\dot{q}_2 \dot{q}_4 + MX_4 C4\dot{q}_1 \dot{q}_3 + R3MY_4 C4\dot{q}_1 \dot{q}_4 \\
 & \quad + MY_4 S4\dot{q}_2 \dot{q}_4 + MY_4 S4\dot{q}_1 \dot{q}_3
 \end{aligned}$$

### Ejercicio práctico 2.1.3. Cálculo de Energía cinética

Determinar la Energía cinética de los robots del Ejercicio práctico 1.2.

### Construcción de la matriz de inercia

Es posible representar el modelo dinámico inverso de forma compacta como se expresa en la ecuación (31), para esto se agrupa en una matriz los valores de las energías cinéticas que estén en función de velocidades articulares comunes, a esta matriz se le denomina Matriz de inercia o Matriz de energía cinética (Vivas, 2010).

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + Q(q) \quad (31)$$

Donde,

**A**: Matriz de inercia.

**Q**: Vector de fuerzas de gravedad.

El primer paso para determinar el modelo dinámico inverso es construir la matriz de inercia, la cual está compuesta por los valores de la energía cinética como se expresa a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Donde, los elementos de la diagonal principal estarán en función de la velocidad articular de cada cuerpo al cuadrado, es decir,

$A_{11}$  sumatoria de términos de energía cinética en función de  $\dot{q}_1^2$ .

$A_{22}$  sumatoria de términos de energía cinética en función de  $\dot{q}_2^2$ .

$A_{33}$  sumatoria de términos de energía cinética en función de  $\dot{q}_3^2$ .

...

$A_{nn}$  sumatoria de términos de energía cinética en función de  $\dot{q}_n^2$ .

Mientras que, los elementos fuera de la diagonal principal estarán en función de dos velocidades articulares de cuerpos distintos, es decir,

$A_{12} = A_{21}$  sumatoria de términos de energía cinética en función de  $\dot{q}_1\dot{q}_2$ .

$A_{13} = A_{31}$  sumatoria de términos de energía cinética en función de  $\dot{q}_1\dot{q}_3$ .

$A_{23} = A_{32}$  sumatoria de términos de energía cinética en función de  $\dot{q}_2\dot{q}_3$ .

Etcétera.

### ***Ejercicio de evaluación 2.2. Construcción de la matriz de inercia***

Determinar la matriz de inercia de los robots SCARA y cilíndrico.

#### ***Solución ejercicio de evaluación 2.2.***

A continuación, se procede a construir cada valor de la matriz de inercia de los robots SCARA y cilíndrico, a partir de los resultados parciales de las energías cinéticas del Ejercicio de evaluación 1.3.1c.

a) Robot SCARA:

$$\begin{aligned}
A_{11} = & \frac{1}{2}ZZR_1 + \frac{1}{2}ZZR_2 + D2MXR_2C2 - 2MY_2S2 + \frac{1}{2}ZZR_3 + D2MX_3C2,3 + D3MX_3C3 \\
& - D2MY_3S2,3 - D3MY_3S3 + \frac{1}{2}D2^2M_4S2,3^2 + \frac{1}{2}D2D3M_4S3S2,3 + \frac{1}{2}D2D3S3S2,3 \\
& + \frac{1}{2}D3^2S3^2 + \frac{1}{2}D2^2M_4C2,3^2 + \frac{1}{2}D2D3M_4C3C2,3 + \frac{1}{2}D2D3C3C2,3 + \frac{1}{2}D3^2C3^2 \\
& + D2MX_4C2,3 + D3MX_4C3 - D2MY_4S2,3 - D3MY_4S3 + Ia_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} = & \frac{1}{2}ZZR_2 + \frac{1}{2}ZZR_3 + D3MX_3C3 - D3MY_3S3 + \frac{1}{2}D3^2S3^2 + \frac{1}{2}D3^2C3^2 + D3MX_4C3 - \\
& D3MY_4S3 + Ia_2
\end{aligned}$$

$$A_{33} = \frac{1}{2}ZZR_3 + Ia_3$$

$$A_{44} = \frac{1}{2}M_4 + Ia_4$$

$$\begin{aligned}
A_{12} = A_{21} = & ZZR_2 + D2MXR_2C2 + ZZR_3 + D2MX_3C2,3 + 2D3MX_3C3 - D2MY_3S2,3 - \\
& 2D3MY_3S3 + \frac{1}{2}D2D3M_4S3S2,3 + \frac{1}{2}D2D3S3S2,3 + D3^2S3^2 + \frac{1}{2}D2D3M_4C3C2,3 + \frac{1}{2}D2D3C3C2,3 + \\
& D3^2C3^2 + D2MX_4C2,3 + 2D3MX_4C3 - D2MY_4S2,3 - 2D3MY_4S3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} = A_{31} = & ZZR_3 + D2MX_3C2,3 + D3MX_3C3 - D2MY_3S2,3 - D3MY_3S3 + D2MX_4C2,3 \\
& + D3MX_4C3 - D2MY_4S2,3 - D3MY_4S3
\end{aligned}$$

$$A_{14} = A_{41} = 0$$

$$A_{23} = A_{32} = ZZR_3 + D3MX_3C3 - D3MY_3S3 + D3MX_4C3 - D3MY_4S3$$

$$A_{24} = A_{42} = 0$$

$$A_{34} = A_{43} = 0$$

Es de notar que los valores de inercia de los motores han sido adicionados a los términos de la diagonal principal, respectivamente, tal como se menciona en la sección de “Parámetros de base”.

b) Robot cilíndrico:

$$A_{11} = \frac{1}{2}ZZR_1 + R3MZR_3 + \frac{1}{2}XXR_4S4^2$$

$$A_{22} = \frac{1}{2}M_2 + Ia_2$$

$$A_{33} = Ia_3$$

$$A_{44} = \frac{1}{2}ZZ_4$$

$$A_{12} = A_{21} = 0$$

$$A_{13} = A_{31} = MX_3 + MX_4 C4 + MY_4 S4$$

$$A_{14} = A_{41} = R3MX_4 S4 + R3MY_4 C4$$

$$A_{23} = A_{32} = 0$$

$$A_{24} = A_{42} = -MX_4 C4 + MY_4 S4$$

$$A_{34} = A_{43} = 0$$

De igual forma que en el primer ejemplo, los valores de inercia de los motores han sido adicionados a los términos de la diagonal principal, respectivamente.

### **Ejercicio práctico 2.2. Construcción de la matriz de inercia**

Construir la matriz de inercia de los robots del Ejercicio práctico 1.2.

### **Energía potencial**

Continuando con la construcción del modelo dinámico inverso, ahora se debe calcular –una a una– las energías potenciales asociadas a cada cuerpo del robot de estudio.

La ecuación (33) expresa la fórmula matemática (Vivas, 2010) para calcular la energía potencial  $U_j$

$$U_j = -[0G^T \ 0]OT_j[jFM_j \ M_j] \quad (33)$$

Donde,  $0G^T = [0 \ 0 \ G3]$ , Con  $G3 = 9,80665 \frac{m}{s^2}$ , es decir, el valor de la gravedad.

Es de notar que este valor se encuentra dentro de un vector de igual dimensión que el primer momento de inercia. A este vector se lo concatena con un cero a la derecha para completar la dimensión de la matriz de transformación con el objetivo de que sean compatibles y se pueda realizar la respectiva multiplicación. Los otros términos de la ecuación son conocidos: la matriz de transformación ( $OT_j$ ), el primer momento de inercia ( $jFM_j$ ) y la masa ( $M_j$ ).

### **Ejercicio de evaluación 2.3. Cálculo de energía potencia**

Determinar la energía potencial de cada uno de los cuerpos de los Robots SCARA y Cilíndrico.

### **Solución ejercicio de evaluación 2.3**

A continuación, haciendo uso de las tablas de parámetros de base (Tablas 5 y 8) y de las matrices de transformación (ecuaciones 30 y 31) de los robots SCARA y cilíndrico, se procede a calcular la energía potencial, según la ecuación (33).

a) Robot SCARA:

· Para  $j = 1$

$$U_1 = -[0G^T \ 0]0T_1[1FM_1 \ M_1]$$

Entonces,

$$U_1 = -[0 \ 0 \ G \ 3 \ 0][C1 \ S1 \ 0 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][MXR_1 \ MY_1 \ MZR_1 \ MR1]$$

Luego,

$$U_1 = -[0 \ 0 \ G \ 3 \ 0][MXR_1 \ MY_1 \ MZR_1 \ MR1]$$

Finalmente,

$$U_1 = -G3MZR_1$$

· Para  $j = 2$

$$U_2 = -[0G^T \ 0]0T_2[2FM_2 \ M_2]$$

El primer paso es multiplicar  $0T_1 * 1T_2$  Para obtener la matriz  $0T_2$ ,

$$\begin{aligned} 0T_2 = 0T_1 1T_2 &= [C1 \ S1 \ 0 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][C2 \ S2 \ 0 \ 0 \\ &\quad -S2 \ C2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ D2 \ 0 \ 0 \ 1] \\ &= [C1C2 - S1S2 \ S1C2 + S2C1 \ 0 \ 0 \ -S2C1 - S1C2 \ -S1S2 \\ &\quad + C1C2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ D2C1 \ D2S1 \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

Con el objetivo de simplificar más la escritura de ecuaciones es aconsejable hacer uso de identidades trigonométricas, en especial, las dos siguientes:

$$\sin \sin (x + y) = \sin \sin (x) \cos \cos (y) + \sin(y)\cos (x) \quad (34)$$

$$\cos \cos (x + y) = \cos \cos (x) \cos \cos (y) - \sin(x)\sin (y) \quad (35)$$

En este caso,

$$\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1 = (\theta_1 + \theta_2) = S1,2$$

$$\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos (\theta_1 + \theta_2) = C1,2$$

Por lo tanto,

$$0T_2 = [C1,2 \ S1,2 \ 0 \ 0 \ -S1,2 \ C1,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ D2C1 \ D2S1 \ 0 \ 1]$$

Luego,

$$U_2 = -[0 \ 0 \ G \ 3 \ 0][C1,2 \ S1,2 \ 0 \ 0 \ -S1,2 \ C1,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ D2C1 \ D2S1 \ 0 \ 1][MXR_2 \ MY_2 \ 0 \ 0]$$

$$U_2 = -[0 \ 0 \ G \ 3 \ 0][MXR_2 \ MY_2 \ 0 \ 0]$$

Finalmente,

$$U_2 = 0$$

· Para  $j = 3$

$$U_3 = -[0G^T \ 0]0T_3[3FM_3 \ M_3]$$

Se multiplica  $0T_2 * 2T_3$  Para obtener la matriz  $0T_3$ ,

$$0T_3 = 0T_2 2T_3 = \begin{bmatrix} C1,2 \ S1,2 \ 0 \ 0 & -S1,2 \ C1,2 \ 0 \ 0 & 0 \ 0 \ 1 \ 0 & D2C1 \ D2S1 \ 0 \ 1 \\ -S3 \ C3 \ 0 \ 0 & 0 \ 0 \ 1 \ 0 & D3 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C3 \ S3 \ 0 \ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0T_3 = \begin{bmatrix} C1,2C3 - S1,2S3 \ S1,2C3 + S3C1,2 \ 0 \ 0 & -S3C1,2 - S1,2C3 - S1,2S3 \\ + C1,2C3 \ 0 \ 0 & 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ D3C1,2 + D2C1 \ D3S1,2 + D2S1 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$U_3 = -[0 \ 0 \ G3 \ 0] \begin{bmatrix} C1,2C3 - S1,2S3 \ S1,2C3 + S3C1,2 \ 0 \ 0 & -S3C1,2 - S1,2C3 - S1,2S3 \\ + C1,2C3 \ 0 \ 0 & 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ D3C1,2 + D2C1 \ D3S1,2 + D2S1 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MX_3 \ MY_3 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_3 = -[0 \ 0 \ G3 \ 0][MX_3 \ MY_3 \ 0 \ 0]$$

Finalmente,

$$U_3 = 0$$

· Para  $j = 4$

$$U_4 = -[0G^T \ 0]0T_4[4FM_4 \ M_4]$$

Se multiplica  $0T_3 * 3T_4$  Para obtener la matriz  $0T_4$ ,

$$0T_4 = 0T_3 3T_4 = \begin{bmatrix} C1,2C3 - S1,2S3 \ S1,2C3 + S3C1,2 \ 0 \ 0 & -S3C1,2 - S1,2C3 - S1,2S3 \\ + C1,2C3 \ 0 \ 0 & 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ D3C1,2 + D2C1 \ D3S1,2 \\ + D2S1 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ R4 \ 1 \end{bmatrix}$$

$$0T_4 = \begin{bmatrix} C1,2C3 - S1,2S3 \ S1,2C3 + S3C1,2 \ 0 \ 0 & -S3C1,2 - S1,2C3 - S1,2S3 \\ + C1,2C3 \ 0 \ 0 & 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ D3C1,2 + D2C1 \ D3S1,2 + D2S1 \ R4 \ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$U_4 = -[0 \ 0 \ G3 \ 0] \begin{bmatrix} C1,2C3 - S1,2S3 \ S1,2C3 + S3C1,2 \ 0 \ 0 & -S3C1,2 - S1,2C3 - S1,2S3 \\ + C1,2C3 \ 0 \ 0 & 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ D3C1,2 + D2C1 \ D3S1,2 + D2S1 \ R4 \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MX_4 \ MY_4 \ MZ_4 \ M_4 \end{bmatrix}$$

$$U_4 = -[0 \ 0 \ G3 \ G3R4][MX_4 \ MY_4 \ MZ_4 \ M_4]$$

Finalmente,

$$U_4 = -G3MZ_4 - G3R4M_4$$

Una vez se ha calculado la energía potencial asociada a cada cuerpo del robot, la energía potencial total será igual a la suma de estas energías, así:

$$U_T = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

Entonces,

$$U_T = -G3MZR_1 - G3MZ_4 - G3R4M_4$$

b) Robot Cilíndrico.

· Para  $j = 1$

$$U_1 = -[0G^T \ 0]0T_1[1FM_1 \ M_1]$$

Entonces,

$$U_1 = -[0 \ 0 \ G \ 3 \ 0][C1 \ S1 \ 0 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][0 \ 0 \ MZ_1 \ M1]$$

Luego,

$$U_1 = -[0 \ 0 \ G \ 3 \ 0][MXR_1 \ MY_1 \ MZR_1 \ MR1]$$

Finalmente,

$$U_1 = -G3MZ_1$$

· Para  $j = 2$

$$U_2 = -[0G^T \ 0]0T_2[2FM_2 \ M_2]$$

El primer paso es multiplicar  $0T_1 * 1T_2$  Para obtener la matriz  $0T_2$ ,

$$\begin{aligned} 0T_2 = 0T_1 1T_2 &= [C1 \ S1 \ 0 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \\ &= [C1 \ S1 \ 0 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

Luego,

$$U_2 = -[0 \ 0 \ G \ 3 \ 0][C1 \ S1 \ 0 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][0 \ 0 \ MZ_2 \ M_2]$$

$$U_2 = -[0 \ 0 \ G \ 3 \ G \ 3 \ R2][MXR_2 \ MY_2 \ 0 \ 0]$$

Finalmente,

$$U_2 = 0$$

· Para  $j = 3$

$$U_3 = -[0G^T \ 0]0T_3[3FM_3 \ M_3]$$

Se multiplica  $0T_2 * 2T_3$  Para obtener la matriz  $0T_3$ ,

$$\begin{aligned} 0T_3 = 0T_2 2T_3 &= [C1 \ S1 \ 0 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1][1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ &\quad -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ R3 \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

$$0T_3 = [C1 \ S1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ -R3S1 \ R3C1 \ R2 \ 1]$$

Entonces,

$$U_3 = -[0 \ 0 \ G \ 3 \ 0][C1 \ S1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \ -R3S1 \ R3C1 \ R2 \ 1][MX_3 \ MY_3 \ MZR_3 \ 0]$$

$$U_3 = -[0 \ -G \ 3 \ 0 \ G3R2][MX_3 \ MY_3 \ MZR_3 \ 0]$$

Finalmente,

$$U_3 = G3MY_3$$

· Para  $j = 4$

$$U_4 = -[0G^T \ 0]0T_4[4FM_4 \ M_4]$$

Se multiplica  $0T_3 * 3T_4$  Para obtener la matriz  $0T_4$ ,

$$0T_4 = 0T_3 3T_4 = \begin{bmatrix} C1 \ S1 \ 0 \ 0 & 0 \ 0 & -1 \ 0 & -S1 \ C1 \ 0 \ 0 & -R3S1 \ R3C1 \ R2 \ 1 \\ -S4 \ C4 \ 0 \ 0 & 0 \ 0 \ 1 \ 0 & 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C4 \ S4 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}$$

$$0T_4 = \begin{bmatrix} C1C4 \ S1C4 & -S4 \ 0 & -S4C1 & -S1S4 & -C4 \ 0 & -S1 \ C1 \ 0 \ 0 & -R3S1 \ R3C1 \ R2 \ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$U_4 = -[0 \ 0 \ G3 \ 0] \begin{bmatrix} C1C4 \ S1C4 & -S4 \ 0 & -S4C1 & -S1S4 & -C4 \ 0 & -S1 \ C1 \ 0 \ 0 \\ -R3S1 \ R3C1 \ R2 \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MX_4 \ MY_4 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$U_4 = -[-G3S4 \ -G3C4 \ 0 \ G3R2] \begin{bmatrix} MX_4 \ MY_4 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$U_4 = G3MX_4S4 + G3MY_4C4$$

Una vez se ha calculado la energía potencial asociada a cada cuerpo del robot, se determina la energía potencial total:

$$U_T = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

Entonces,

$$U_T = -G3MZ_1 + G3MY_3 + G3MX_4S4 + G3MY_4C4$$

### **Ejercicio práctico 2.3. Cálculo de energía potencial**

Determinar la energía potencial total de los robots del Ejercicio práctico 1.2.

#### **Vector de fuerzas de gravedad**

Una vez calculada la energía potencial total, el último paso para la obtención del modelo dinámico inverso es construir el vector de fuerzas de gravedad ( $Q$ ) donde cada término asociado a cada cuerpo del robot, corresponde a la derivada parcial de la energía potencial total con respecto a la variable articular correspondiente. Matemáticamente se expresa así:

$$Q_j = \frac{\partial U_T}{\partial q_j} \quad (36)$$

### Ejercicio de evaluación 2.4. Construcción del vector de fuerzas de gravedad

Construir el vector de fuerzas de gravedad y representar el modelo dinámico inverso de los robots SCARA y cilíndrico.

#### Solución ejercicio de evaluación 2.4

A continuación, se procede a construir el vector de fuerzas de gravedad de los robots SCARA y cilíndrico según la ecuación (36), a partir de los resultados parciales de las energías potenciales totales del Ejercicio de evaluación 1.3.3.

a) Robot SCARA:

· Para  $j = 1$

$$Q_1 = \frac{\partial U_T}{\partial q_1} = \frac{\partial(-G3MZR_1 - G3MZ_4 - G3R4M_4)}{\partial \theta_1} = 0$$

· Para  $j = 2$

$$Q_2 = \frac{\partial U_T}{\partial q_2} = \frac{\partial(-G3MZR_1 - G3MZ_4 - G3R4M_4)}{\partial \theta_2} = 0$$

· Para  $j = 3$

$$Q_3 = \frac{\partial U_T}{\partial q_3} = \frac{\partial(-G3MZR_1 - G3MZ_4 - G3R4M_4)}{\partial \theta_3} = 0$$

· Para  $j = 4$

$$Q_4 = \frac{\partial U_T}{\partial q_4} = \frac{\partial(-G3MZR_1 - G3MZ_4 - G3R4M_4)}{\partial R_4} = -G3M_4$$

Finalmente, el modelo dinámico inverso del robot SCARA puede representarse de la siguiente forma:

$$[F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4] = [A_{11} \ A_{12} \ A_{13} \ 0 \ A_{21} \ A_{22} \ A_{23} \ 0 \ A_{31} \ A_{32} \ A_{33} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ A_{44}][\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \ddot{q}_3 \ \ddot{q}_4] + [0 \ 0 \ 0 \ Q_4]$$

El código en Matlab del modelo dinámico –inverso y directo– del Robot SCARA se presenta en el Anexo 1.

b) Robot cilíndrico:

· Para  $j = 1$

$$Q_1 = \frac{\partial U_T}{\partial q_1} = \frac{\partial(-G3MZ_1 + G3MY_3 + G3MX_4 \sin(\theta_4) + 3MY_4 \cos(\theta_4))}{\partial \theta_1} = 0$$

· Para  $j = 2$

$$Q_2 = \frac{\partial U_T}{\partial q_2} = \frac{\partial(-G3MZ_1 + G3MY_3 + G3MX_4 \text{sen}(\theta_4) + 3MY_4 \cos(\theta_4))}{\partial R_2} = 0$$

· Para  $j = 3$

$$Q_3 = \frac{\partial U_T}{\partial q_3} = \frac{\partial(-G3MZ_1 + G3MY_3 + G3MX_4 \text{sen}(\theta_4) + 3MY_4 \cos(\theta_4))}{\partial R_3} = 0$$

· Para  $j = 4$

$$Q_4 = \frac{\partial U_T}{\partial q_4} = \frac{\partial(-G3MZ_1 + G3MY_3 + G3MX_4 \text{sen}(\theta_4) + 3MY_4 \cos \cos(\theta_4))}{\partial \theta_4}$$

$$Q_4 = G3MX_4 \cos(\theta_4) - 3MY_4 \text{sen}(\theta_4)$$

Finalmente, el modelo dinámico inverso del robot SCARA puede representarse de la siguiente forma:

$$[\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4] = [A_{11} \ 0 \ A_{13} \ A_{14} \ 0 \ A_{22} \ 0 \ A_{24} \ A_{31} \ 0 \ A_{33} \ 0 \ A_{41} \ A_{42} \ 0 \ A_{44}] [\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \ddot{q}_3 \ \ddot{q}_4] + [0 \ 0 \ 0 \ Q_4]$$

#### **Ejercicio práctico 2.4. Construcción del vector de fuerzas de gravedad**

Construir el vector de fuerzas de gravedad y representar el modelo dinámico inverso de los robots del Ejercicio práctico 1.2

## CAPÍTULO 3: Control y simulación de robots

Teniendo en cuenta que la fundamentación del control está basada en el modelo dinámico, la función de transferencia del sistema –que está representada por el modelo dinámico directo– debe ser determinada para poder realizar la simulación del robot en un software computacional como Matlab®-Simulink con el objetivo de: 1) obtener los torques o fuerzas que requieren los motores, determinando así, el tipo de motor a implementar; 2) identificar los parámetros inerciales del robot, y 3) lograr sintonizar el controlador.

En los últimos años, la implementación de controladores especializados ha permitido la optimización de los sistemas robóticos, capaces de realizar las tareas programadas con mayor precisión, incluso, son tan fiables que se emplean para salvar vidas humanas en operaciones de alto riesgo donde el pulso micrométrico es clave y la mano del médico no puede llegar a lugares tan profundos y complejos del cuerpo humano, ahí entran los robots quirúrgicos como Da Vinci (Bodner et al., 2004; Lee et al., 2009; McLeod y Melder, 2005).

### Generación de trayectorias y consignas articulares

Las consignas son señales en términos de posición o velocidad que requiere cada articulación para cumplir con una trayectoria u orden que le asigna el programador al robot para cumplir cierta tarea. Estas trayectorias deben ser acordes a la capacidad de absorción de inercia que tiene el sistema robótico, por lo tanto, deben corresponder a trayectorias suaves y continuas, con cierto tiempo de retardo, garantizando la seguridad mecánica de los actuadores robóticos que, por lo general, son motores eléctricos.

Hay dos tipos de consignas.

#### Consigna articular

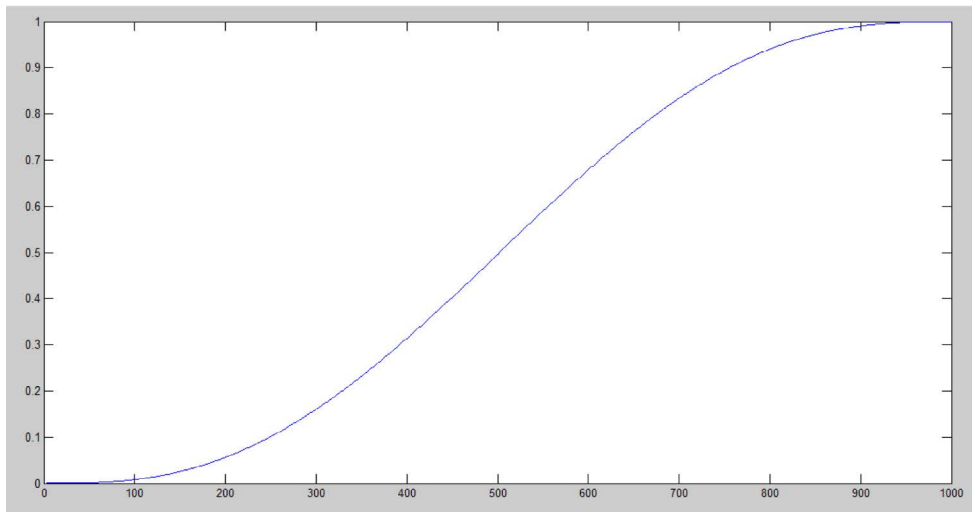
Se denomina consigna articular a toda trayectoria donde se realizan pruebas de seguimiento de trayectorias por articulación, es decir, para cada articulación se asigna posición y velocidad deseada y se verifica a través del error articular el cumplimiento de estos.

#### *Ejercicio de evaluación 3.1.1. Construcción de consigna articular*

Construir en Matlab una consigna de tipo articular para los Robots SCARA y Cilíndrico.

#### *Solución ejercicio de evaluación 3.1.1.*

A continuación, se procede a construir en Matlab la consigna articular tipo polinomio de quinto grado de la Figura 10 para los robots SCARA y Cilíndrico.



*Figura 10*  
Consigna articular tipo polinomio de quinto grado.  
Fuente: elaboración propia.

Lo primero que se requiere es definir el tiempo de muestreo, para este caso se asignará un tiempo de muestreo ( $T_{em}$ ) de un milisegundo:

**$T_{em}=0.001;$**

Después, se definen las posiciones inicial y final:

**$Q_{inicial} = 0.0;$**

**$Q_{final} = 1.0;$**

Se asigna el tiempo ( $T_{fini}$ ) en segundos que tardará el robot en alcanzar la posición final.

**$T_{fini}=1.0;$**

Se procede a calcular la distancia a recorrer a través de la siguiente relación:

**$\Delta_{pos}=Q_{fini}-Q_{inicial};$**

Teniendo en cuenta que es una trayectoria polinomial de quinto grado como se evidencia en la Figura 10, se definen los puntos de quiebre (puntos de inflexión, donde termina la curva ascendente y empieza la descendente):

**$t_1=0;$**

**$t_2=T_{fini};$**

**$t_3=2*T_{fini};$**

Se procede a calcular el número de muestras según tiempo de muestreo y posición final:

```
Nmuestras=1000;
instant=[0.001:Tem:1]';
xt=0;
69
temps=0;
p=[]';
```

Luego, se construye los vectores y ciclos para la simulación, asimismo, se define matemáticamente el polinomio de quinto grado:

```
for g=1:1:Nmuestras
    p(g)=xt;
    if (temps<=t2)
        ti=t1;
        a0=Qfini*(10*(temps/Tfini)^3 - 15*(temps/Tfini)^4 + 6*(temps/Tfini)^5);
    elseif (temps<=t3)
        ti=t2;
        a0=Qfini;
    end
    xt=a0;
    temps=temps+Tem;
end
qd_1 = p';
```

Finalmente, se define el nombre de las consignas con los valores de amplitud en términos de posición deseada:

```
cons1 = qd_1;
cons2 = 1.3*qd_1;
cons3 = 1.5*qd_1;
cons4 = 0.8*qd_1;
```

```
qd_2 = cons2;
```

```
qd_3 = cons3;
```

```
qd_4 = cons4;
```

El anterior código –para la trayectoria articular tipo polinomio de quinto grado– ordenado y listo para simulación en Matlab, se encuentra en el Anexo 2.

### ***Ejercicio práctico 3.1.1. Construcción de consigna articular***

Construir en Matlab una consigna de tipo articular para los Robots del Ejercicio práctico 1.2.

### **Consigna cartesiana**

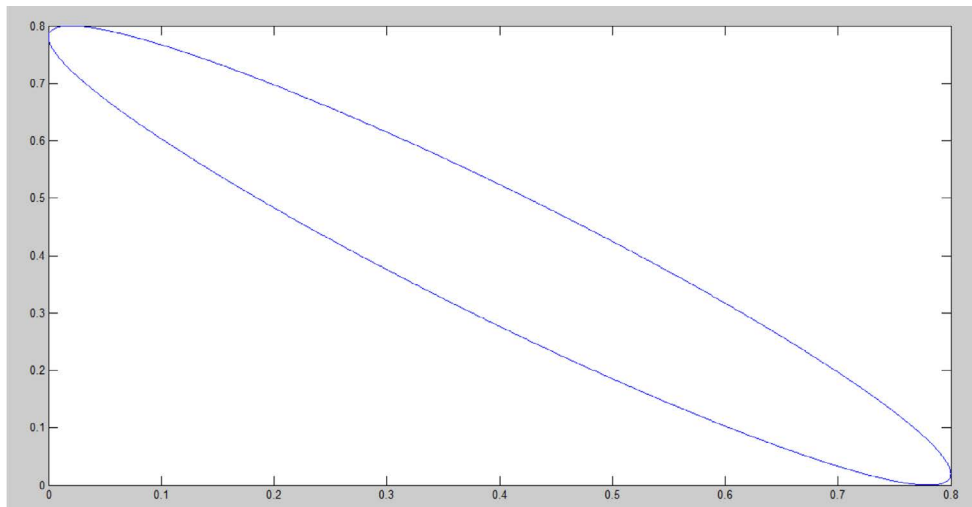
Se denomina consigna cartesiana a la trayectoria asignada al órgano terminal del robot para que lleve a cabo una tarea generalmente de tipo industrial.

### ***Ejercicio de evaluación 3.1.2. Construcción de consigna cartesiana***

Construir en Matlab una consigna cartesiana para los Robots SCARA y cilíndrico.

### ***Solución ejercicio de evaluación 3.1.2.***

A continuación, se procede a construir en Matlab la consigna elíptica cartesiana de la Figura 11 para los robots SCARA y cilíndrico.



*Figura 11*  
Trayectoria elíptica tipo consigna cartesiana.  
Fuente: elaboración propia.

Lo primero que se requiere es definir el tiempo de muestreo, para este caso se asignará un tiempo de muestreo ( $T_{em}$ ) de un milisegundo:

```
Tem=0.001;
```

Se asigna el tiempo ( $T_{final}$ ) en segundos que tardará el robot en alcanzar la posición final.

```
Tfinal=3.0;
```

Se procede a calcular el número de muestras según tiempo de muestreo y posición final:

```
Nmuestras=(Tfinal/Tem)+1;
```

```
if ((round(Nmuestras)-Nmuestras) == 0)
```

```
    instant=[0:Tem:Tfinal];
```

```
else
```

```
    Nmuestras = Nmuestras+1;
```

```
    instant=[0:Tem:Tfinal+Tem];
```

```
end
```

```
t=0;
```

Luego, se construye el ciclo para la simulación, asimismo, se define matemáticamente la consigna circular para X y Y:

```
for h=1:1:Nmuestras
```

```
    t=t+Tem;
```

```
    x1(h)=0.4*sin(2*pi*(1/Tfinal)*t-3*pi/5);
```

```
    y1(h)=0.4*cos(2*pi*1/(Tfinal)*t);
```

```
end
```

```
x1=x1';
```

```
y1=y1';
```

Finalmente, se define el nombre de las consignas con los valores de amplitud en términos de posición deseada:

```
cons1= 0.4 + x1;
```

```
cons2= 0.4 + y1;
```

```
cons3=ones(3001,1);
```

```

% qd_1 = cons1;
cons4 = -0.4*ones(3001,1);
% qd_2=cons2;
% qd_3=cons3;
% qd_4=cons4;

```

El anterior código -para la trayectoria de la consigna elíptica cartesiana - ordenado y listo para simulación en Matlab, se encuentra en el Anexo 2.

### Ejercicio práctico 3.1.2. Construcción de consigna cartesiana

Construir en Matlab una consigna cartesiana para los Robots del Ejercicio práctico 1.2.

### Control PID

El control proporcional, integral y derivativo (PID) es una herramienta que trabaja en lazo cerrado corrigiendo los errores del presente a través de la comparación de la salida con la entrada, y predice los errores futuros a través de la recopilación de errores pasados; es ampliamente utilizado en aplicaciones industriales incluyendo los robots. En la Figura 12 se evidencia –en diagrama de bloques– un controlador PID, el cual, pese su sencillez y bajo costo de implementación, opera eficientemente la gran mayoría de veces. Por otro lado, presenta algunas desventajas en las aplicaciones robóticas, por ejemplo, cuando se requieren movimientos muy rápidos puede presentar imprecisiones en el seguimiento de consignas y error en estado estacionario difícil de corregir.

Este método de control es conveniente cuando no se precisa del modelo matemático del robot, es decir, cuando no se cuenta con la función de transferencia.

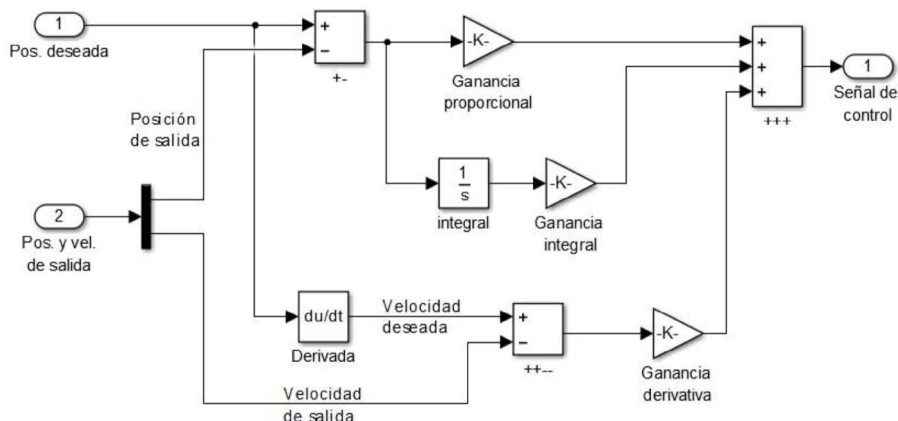


Figura 12  
Diagrama de bloques en Simulink de un control PID  
Fuente: elaboración propia.

## Sintonización del controlador PID

Aunque existen varios métodos matemáticos para lograr la sintonización del controlador PID, a continuación, se expresa un método particular y sencillo para lograrlo manualmente, es decir, a través de ensayo y error, teniendo en cuenta que se vuelve más complejo conforme más articulaciones presenta el robot.

Para realizar este método es necesario visualizar el error articular (diferencia entre la posición de salida y la posición deseada). A partir de este error se procede de la siguiente manera:

1. Asignar valor unitario a las constantes proporcionales ( $K_p = 1$ ) y mantener en cero las demás constantes ( $K_i = K_d = 0$ ). Con esto se logra obtener respuesta en lazo abierto del robot, aunque la salida será inestable.
2. Incrementar las ganancias proporcionales hasta obtener estabilidad, teniendo en cuenta la señal de error articular mencionada.
3. Incrementar con mesura las ganancias derivativas con el objetivo de disminuir las oscilaciones evidenciadas en la señal de error.
4. Cuando se logre disminuir considerablemente las oscilaciones sin perder estabilidad, nuevamente incrementar los valores de las ganancias proporcionales con el fin de seguir disminuyendo el error.
5. Repetir los pasos 3 y 4 hasta que se logre eliminar el error de estado estacionario en todas las señales de error articular.
6. En caso de que se siga presentando error de estado estacionario en alguna de las señales articulares, incrementar un poco la ganancia integral.

### *Ejercicio de evaluación 3.2. Construcción del sistema robótico con control PID*

Construir en Simulink el sistema de control para el robot SCARA con controlador PID articular.

### *Solución ejercicio de evaluación 3.2.*

A continuación, se procede a construir en Simulink el diagrama de bloques del sistema de control para el robot SCARA con controlador PID articular. Después, se realiza la sintonización del controlador con el método de ensayo y error teniendo en cuenta los pasos de sintonización manual.

El primer paso es agregar las entradas donde se definirán las consignas deseadas. Siendo el Robot SCARA de cuatro grados de libertad, se definen cuatro entradas articulares asignando a cada una su valor de consigna instantáneo y el tiempo de muestreo ( $T_m$ ) como se aprecia en la Figura 13. Para esto, se hace uso del bloque 'From Workspace' de la librería de Simulink (Figura 14).

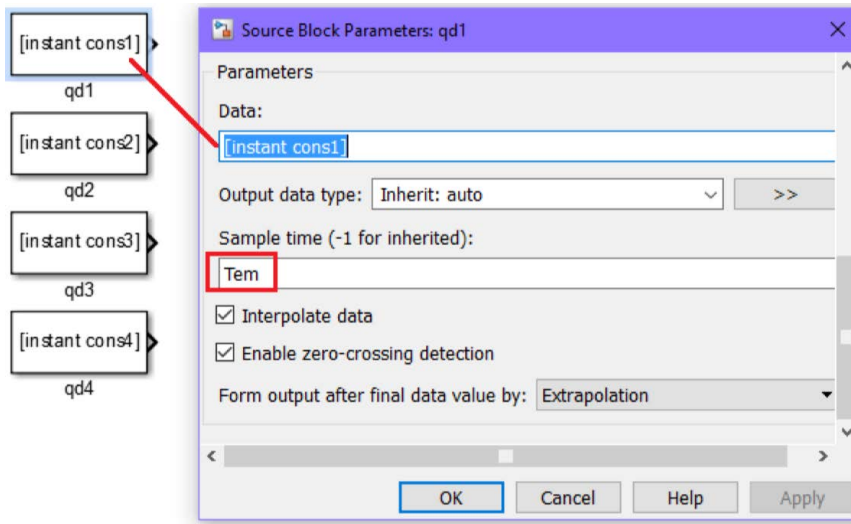


Figura 13

Definición de las cuatro entradas articulares

Fuente: elaboración propia.

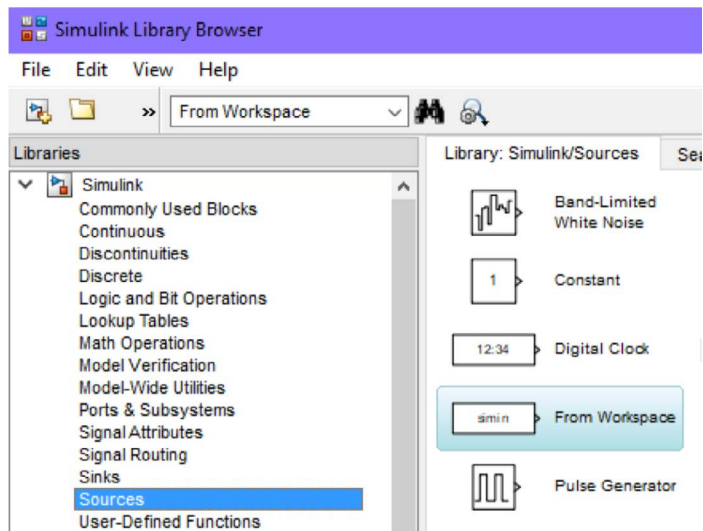


Figura 14

Source- From Workspace

Fuente: elaboración propia.

El siguiente paso es utilizar el elemento multiplexor (Figura 15) para empaquetar las cuatro señales de entrada en un solo canal, tal como se aprecia en la Figura 16.

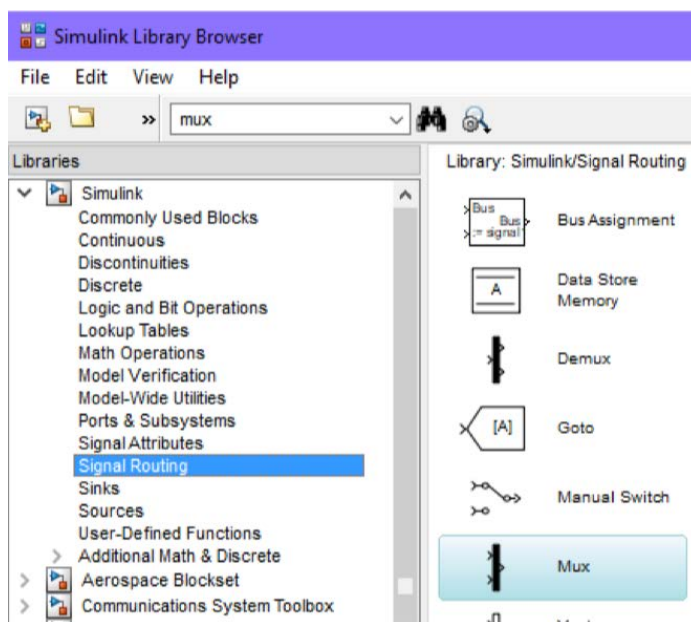


Figura 15  
Signal Routing - Mux.  
Fuente: elaboración propia.

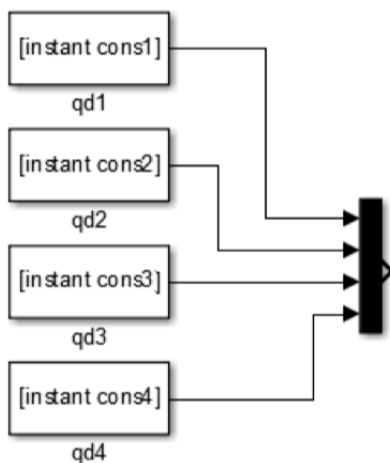


Figura 16  
Señales de entrada multiplexadas  
Fuente: elaboración propia.

Después, se introduce un bloque de subsistema (Figura 17) el cual contendrá el controlador PID con las ganancias proporcionales ( $K_p$ ), integrales ( $K_i$ ) y derivativas ( $K_d$ ) para cada articulación (Figura 18). Es de notar que se ha agregado a la señal de error de posición, una salida que irá a un 'Scope' (osciloscopio) donde se podrá medir el error articular, tal como se aprecia en la Figura 19.

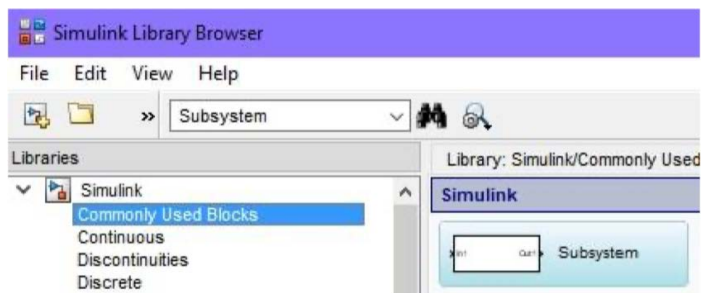


Figura 17  
Commonly Used Blocks - Subsystem  
Fuente: elaboración propia.

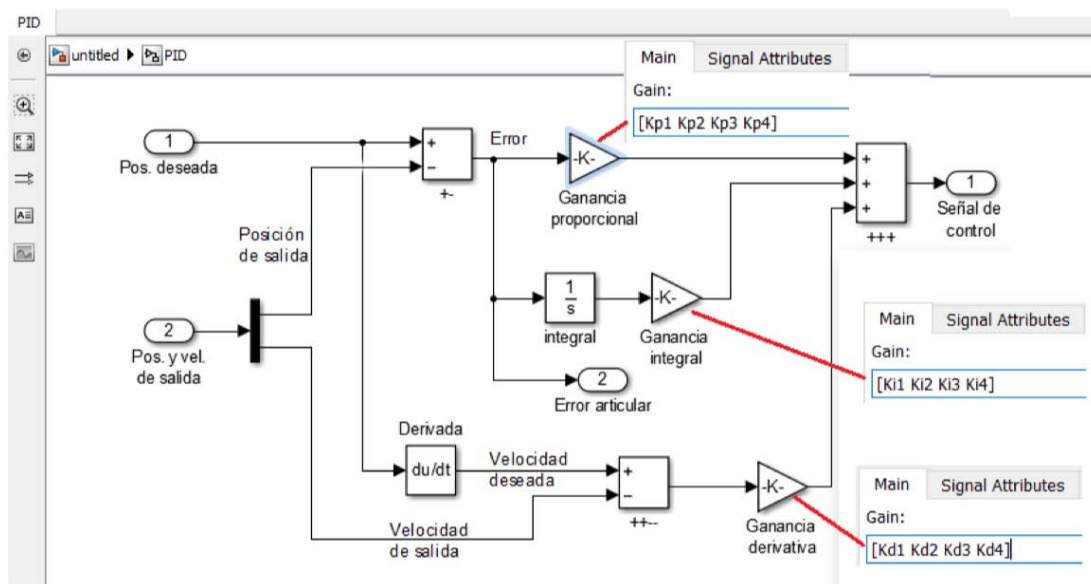


Figura 18  
Controlador PID con ganancias y salida de error articular.  
Fuente: elaboración propia.

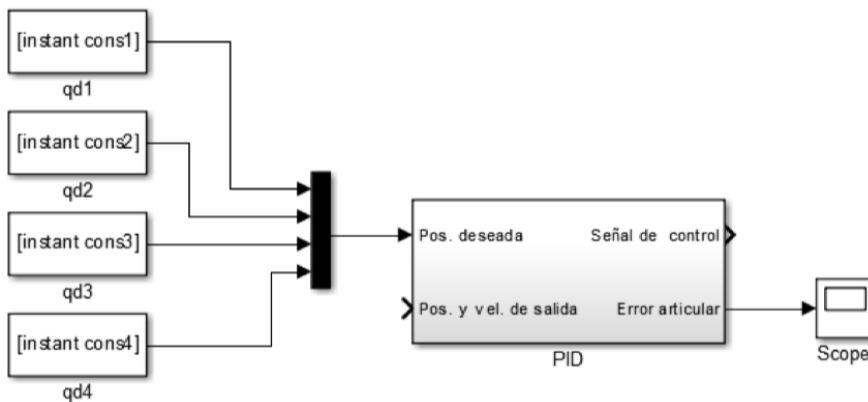


Figura 19  
Controlador PID contenido en el subsistema con osciloscopio  
Fuente: elaboración propia.

Teniendo en cuenta que la señal de control proveniente del controlador PID es de tipo digital, se debe agregar un convertidor digital/analógico (D/A) denominado “Mantenedor de orden cero” (Zero-OrderHold) (Figura 20). Lo único que exige es el tiempo de muestreo (Tem), esto con el objetivo de acondicionar la señal que ingresará al modelo dinámico directo, correspondiente a la función de transferencia del robot.

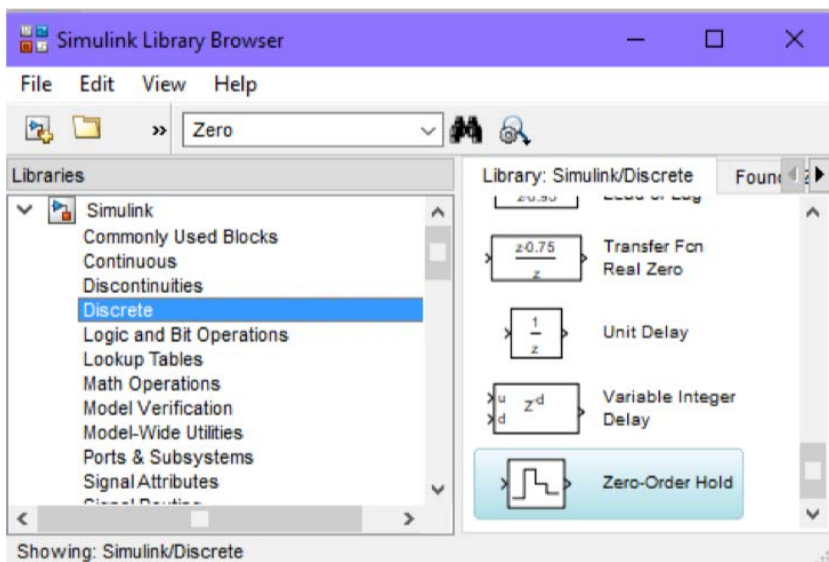


Figura 20  
Discrete -Zero-Order-Hold  
Fuente: elaboración propia.

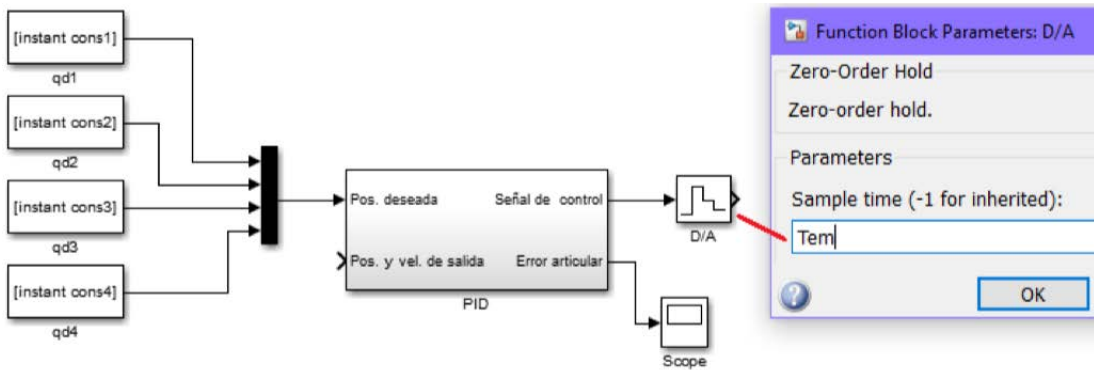


Figura 21  
Convertor D/A agregado a la señal de control  
Fuente: elaboración propia.

El siguiente paso será agregar el modelo dinámico directo correspondiente a la función de transferencia del robot, para esto se hace uso de la función 'S-Function' en la cual se agregará el nombre del Script donde se ha guardado el código del modelo dinámico directo (scara\_directo.m del Anexo 1), tal como se aprecia en la Figura 22. Por otro lado, 'QI' corresponde a la posición inicial previamente cargada en el código.

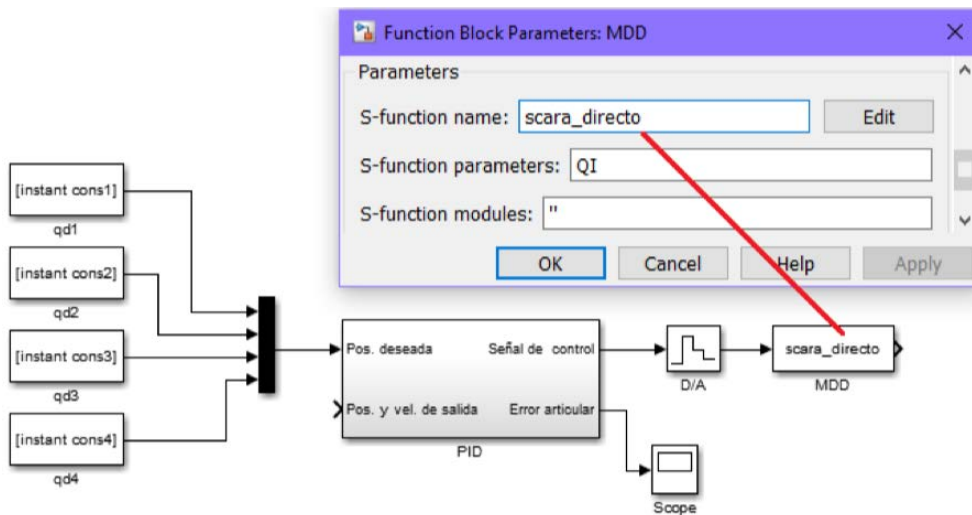


Figura 22  
S-Function - Modelo dinámico directo.  
Fuente: elaboración propia.

El siguiente paso será agregar el modelo dinámico directo correspondiente a la función de transferencia del robot, para esto se hace uso de la función 'S-Function' en la cual se agregará el nombre del Script donde se ha guardado el código del modelo dinámico directo (scara\_directo.m del Anexo 1), tal como se aprecia en la Figura 22. Por otro lado, 'Q1' corresponde a la posición inicial previamente cargada en el código.

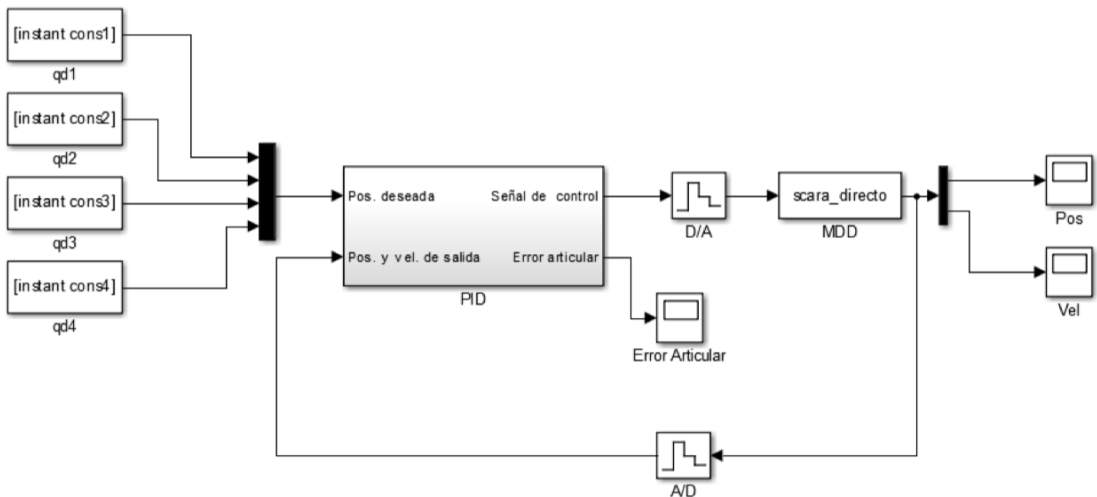


Figura 23  
Sistema de control para el robot SCARA con controlador PID articular  
Fuente: elaboración propia.

Para la ejecución de la simulación se precisa generar un código de inicialización donde estarán definidos: tiempo de muestreo, trayectoria deseada, valores articulares iniciales y las ganancias del controlador.

A continuación, se presenta el código en Matlab de la inicialización (inicio\_pid\_articular.m) para la ejecución de la simulación.

```
clc, clear all, close all;

% Tiempo de muestreo
Tem = 0.001;

% Trayectoria deseada:

grado_cinco;
```

% Valores articulares iniciales para el SCARA:

QI= [0;0;0;0];

%% Ganancias del controlador PID:

Kp1 = 1;

Kp2 = 1;

Kp3 = 1;

Kp4 = 1;

Kd1 = 0;

Kd2 = 0;

Kd3 = 0;

Kd4 = 0;

Ki1 = 0;

Ki2 = 0;

Ki3 = 0;

Ki4 = 0;

El tiempo de muestreo (Tem) debe corresponder al asignado en la trayectoria de prueba, en este caso 'grado\_cinco', la cual se encuentra en el Anexo 2. Observe que, inicialmente, las únicas ganancias con valor unitario (paso 1) son las de tipo proporcional (Kp), las demás ganancias son iguales a cero. Esto provocará una respuesta reflejada en las señales de error articular (Figura 24).

Teniendo en cuenta el orden de las señales en el osciloscopio, según el color:

- Consigna articular 1: amarillo
- Consigna articular 2: magenta
- Consigna articular 3: azul claro
- Consigna articular 4: rojo

En la Figura 24 se puede observar que la señal más inestable es la de color rojo correspondiente a la consigna articular 4.

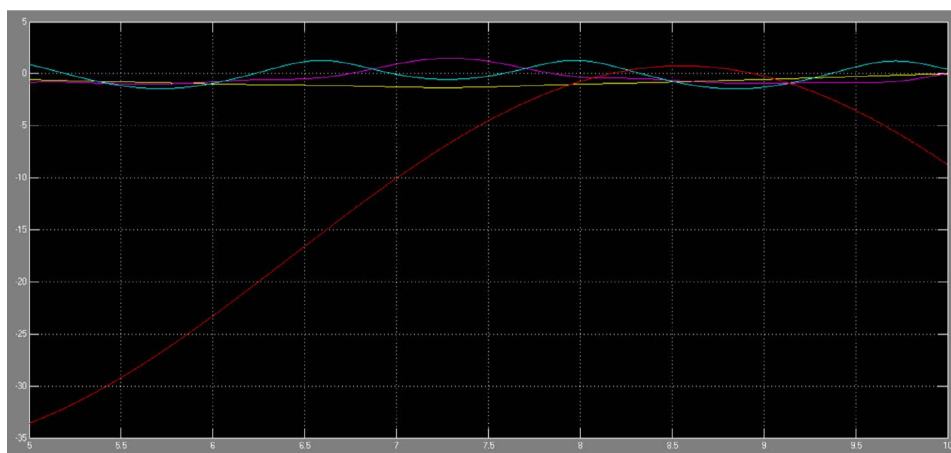


Figura 24  
Error articular con ganancia proporcional igual a 1.  
Fuente: elaboración propia.

Teniendo eso en cuenta, se procede a realizar la sintonización del controlador por el método de ensayo y error siguiendo los pasos de sintonización manual, hasta obtener los siguientes valores de ganancias:

%% Ganancias del controlador PID:

$K_{p1} = 400000;$

$K_{p2} = 150000;$

$K_{p3} = 120000;$

$K_{p4} = 1100000;$

$K_{d1} = 250;$

$K_{d2} = 100;$

$K_{d3} = 60;$

$K_{d4} = 750;$

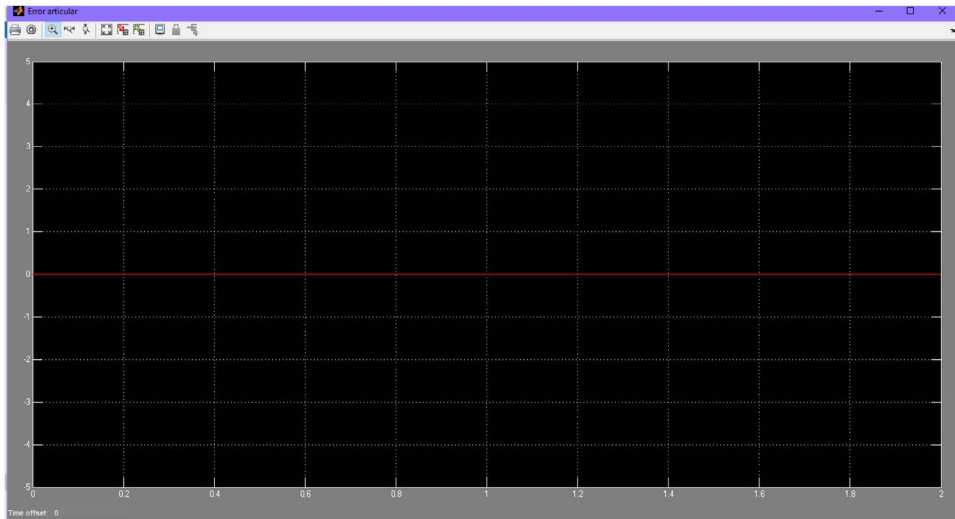
$K_{i1} = 0;$

$K_{i2} = 0;$

$K_{i3} = 0;$

$K_{i4} = 0;$

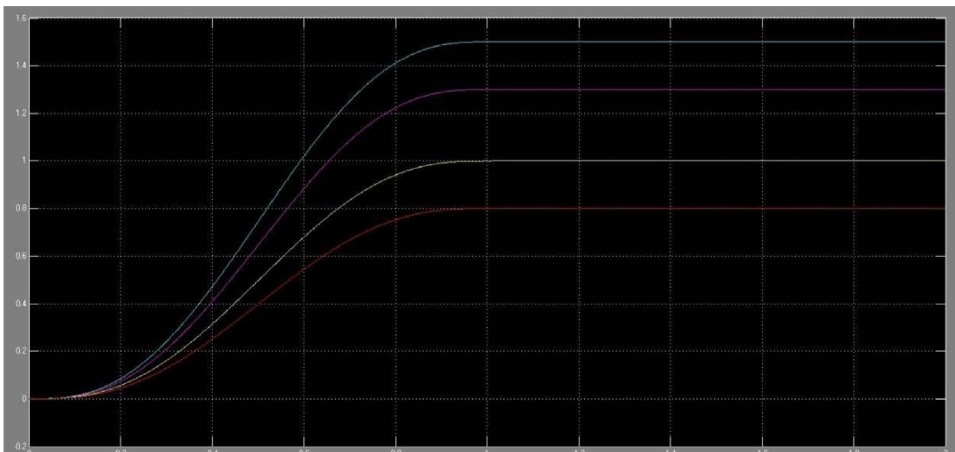
Se observa que el error articular disminuyó hasta tender a cero (Figura 25), sin la necesidad de adicionar ganancias de tipo integral.



*Figura 25*  
Error articular nulo con controlador PID sintonizado.  
Fuente: elaboración propia.

Finalmente, en la Figura 26 se observa el seguimiento de consignas según la trayectoria polinomial de grado cinco donde se han asignado las siguientes amplitudes:

- Consigna 1 = 1; señal amarilla.
- Consigna 2 = 1.3; señal magenta.
- Consigna 3 = 1.5; señal azul claro.
- Consigna 4 = 0.8; señal roja.



*Figura 26*  
Seguimiento de consignas según trayectoria polinomial grado cinco  
Fuente: elaboración propia.

### Ejercicio práctico 3.2. Construcción de sistema robótico con control PID

Construir en Simulink el sistema de control PID articular para los Robots del Ejercicio práctico 1.2.

#### Control por par calculado (CTC)

El control por par calculado, también conocido como control CTC por sus siglas en inglés, o control dinámico, es una herramienta que cuenta con doble lazo cerrado, en donde, el lazo interno funciona como un calculador en línea del modelo dinámico a partir de sus parámetros dinámicos, permitiendo linealizar el sistema, mientras que el lazo externo funciona con un controlador de tipo PD clásico, corrigiendo los errores articulares para el sistema previamente linealizado.

Este tipo de control permite el seguimiento de consignas con gran precisión incluso para robots que alcanzan velocidades considerablemente altas. La configuración del control CTC –en diagrama de bloques– se aprecia en la Figura 27.

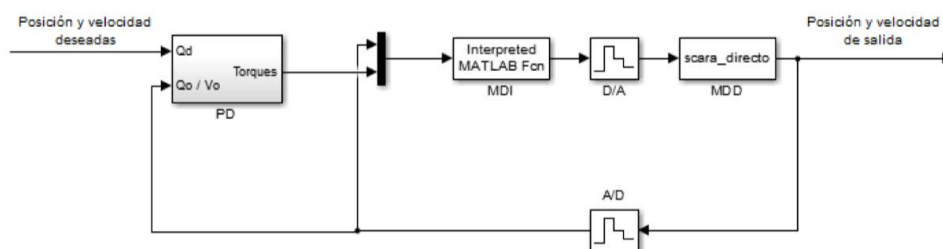


Figura 27  
Diagrama de bloques del control CTC  
Fuente: elaboración propia.

La sintonización del control de lazo externo (PD) se realiza igual que en el caso anterior, es decir, mediante los pasos del método de ensayo y error. Sin embargo, esta vez se requiere encontrar únicamente los parámetros de las ganancias proporcionales y derivativas, por lo tanto, este proceso será más sencillo.

### Ejercicio de evaluación 3.3. Construcción del sistema robótico con control CTC articular

Construir en Simulink el sistema de control para el robot SCARA con controlador CTC articular.

#### Solución ejercicio de evaluación 3.3.

A continuación, se procede a construir en Simulink el diagrama de bloques del sistema de control para el robot SCARA con controlador CTC articular, después, se realiza la sintonización del controlador por el método de ensayo y error teniendo en cuenta los pasos de sintonización manual.

Tal como se aprecia en la Figura 27, el diagrama de bloques de este sistema de control es similar al implementado en el control PID a excepción de un nuevo elemento: el modelo dinámico inverso (MDI), por lo tanto, se expondrá únicamente las herramientas y funciones para su construcción, asimismo, la implementación del controlador PD.

En la Figura 28 se aprecia el bloque 'Interpreted MATLAB Function' de la librería de Simulink.

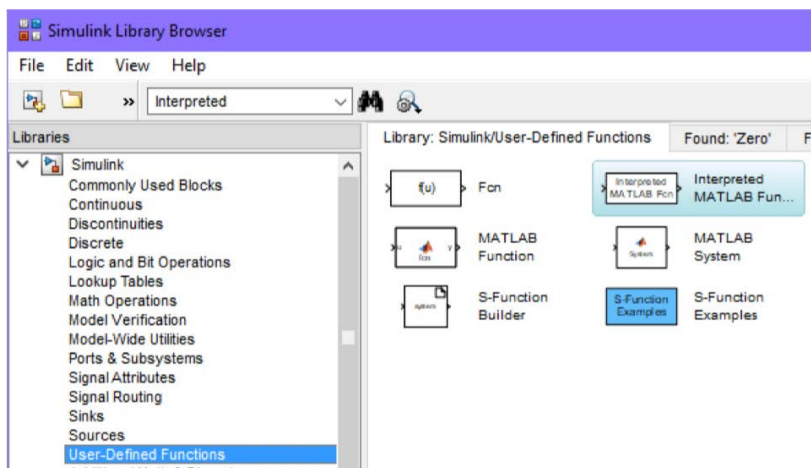


Figura 28  
User-Defined Functions - Interpreted MATLAB Fcn.  
Fuente: elaboración propia.

En esta función se agregará el nombre del Script donde se ha guardado el código del modelo dinámico inverso (scara\_inverso.m del Anexo 1) en función de los parámetros de entrada de la función programada en Matlab: cuatro posiciones, cuatro velocidades y sus derivadas, las cuales deben escribirse como funciones simples y ordenadas:  $u(1)$ ,  $u(2)$ , ...,  $u(12)$ . Por otro lado, 'Output dimensions' corresponderá al número de variables a identificar, en este caso, será de cuatro dimensiones correspondientes a los cuatro torques que ingresarán al modelo dinámico directo, tal como se aprecia en la Figura 29.

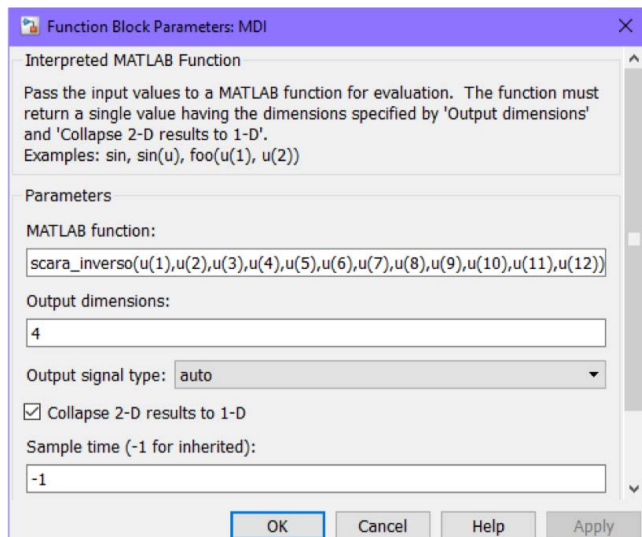


Figura 29  
Parámetros y dimensiones de salida del MDI.  
Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, en un bloque de subsistema se implementa el controlador PD con las ganancias proporcionales ( $K_p$ ) y derivativas ( $K_d$ ) para cada articulación (Figura 30), asimismo, se agrega una salida para la señal de error de posición, la cual irá a un 'Scope' donde se podrá medir el error articular.

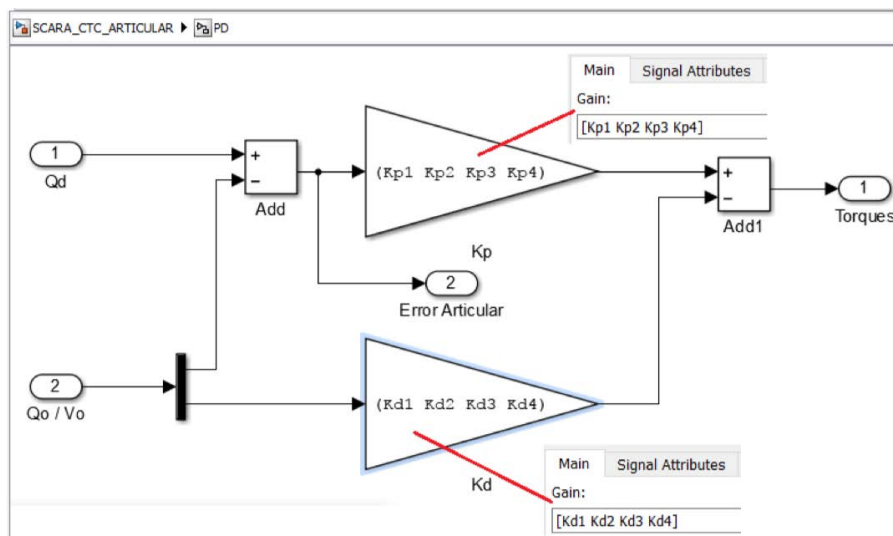


Figura 30  
Parámetros y dimensiones de salida del MDI.  
Fuente: elaboración propia.

Finalmente, en la Figura 31 se presenta el sistema de control para el robot SCARA con controlador CTC articular.

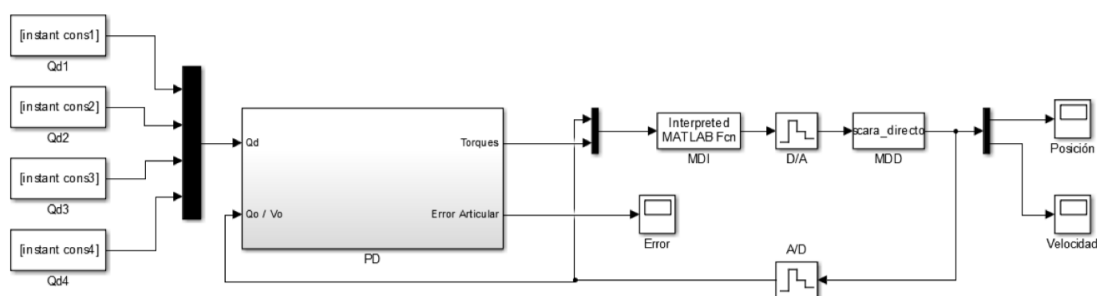


Figura 31  
Sistema de control para el robot SCARA con controlador CTC articular  
Fuente: elaboración propia.

Para la ejecución de la simulación se necesita generar un código de inicialización donde estarán definidos: tiempo de muestreo, trayectoria deseada, valores articulares iniciales y las ganancias del controlador. A continuación, se presenta el código en Matlab (inicio\_CTC\_articular.m) con las ganancias del controlador, después de haber realizado la sintonización por el método de ensayo y error.

```
clc, clear all, close all;

%% Tiempo de muestreo

Tem = 0.001;

%% Trayectorias

lineal;
% circular1;
% circular2;
% circular3;

%% Inicialización de posiciones articulares

QI = [0;0;0;0];

%% Contantes del controlador

Kp1 = 1200000;
Kp2 = 400000;
Kp3 = 100000;
Kp4 = 900000;

Kd1 = 1000;
Kd2 = 800;
Kd3 = 600;
Kd4 = 1000;
```

En la Figura 32 se observa el seguimiento de consignas según la trayectoria lineal cargada en el inicio. Cabe destacar que se activan únicamente las articulaciones 1 (amarilla) y 2 (magenta), mientras que la 3 (azul claro) y la 4 (roja) permanecen inactivas, es decir, permanecen en cero.

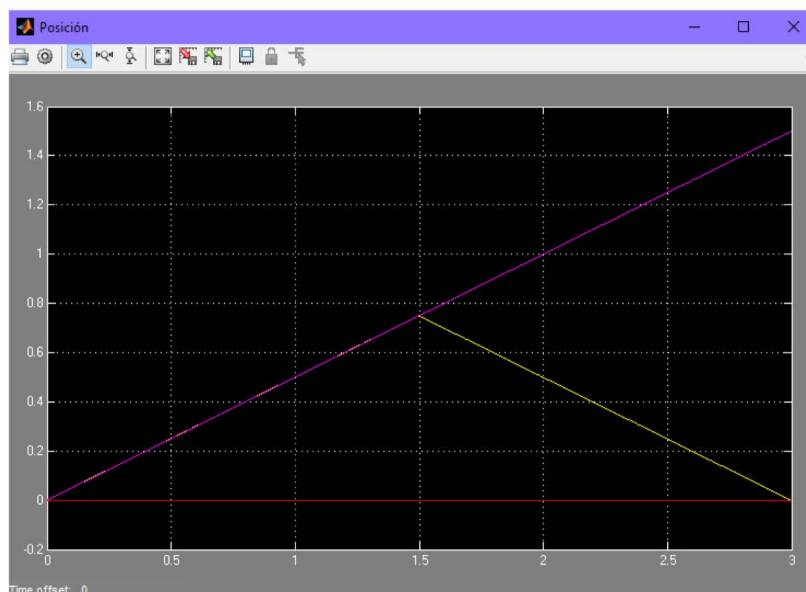


Figura 32  
Seguimiento de trayectoria lineal  
Fuente: elaboración propia.

### Ejercicio práctico 3.3. Construcción de sistema robótico con control CTC articular

Construir en Simulink el sistema de control CTC articular para los robots del Ejercicio práctico 1.2.

## CAPÍTULO 4: Entorno virtual para pruebas

Teniendo en cuenta los resultados del control y simulación de los sistemas robóticos presentados en el Capítulo 3, surge la necesidad de ir un poco más allá y explorar dos herramientas que permitirán la construcción de los robots en un entorno 3D de realidad virtual y observar la ejecución de las trayectorias.

### Introducción a V-Realm Builder

La primera herramienta se trata de 'V-Realm Builder' (Figura 33), es una herramienta de edición 3D para crear y editar escenarios de realidad virtual, en este caso, para crear el ambiente y el robot que se haya modelado, con el objetivo de probar el control y el respectivo seguimiento de trayectorias.

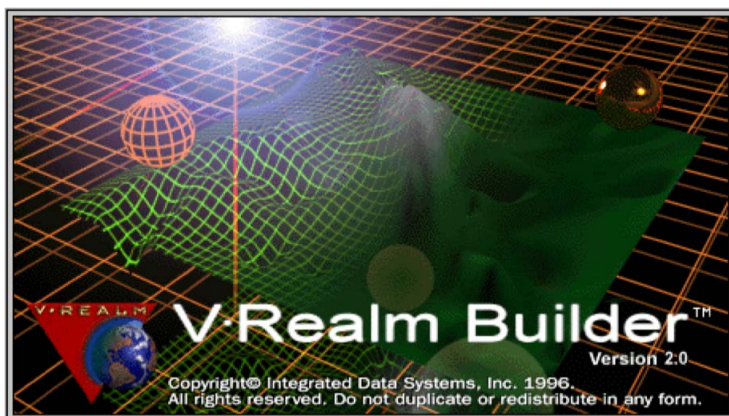
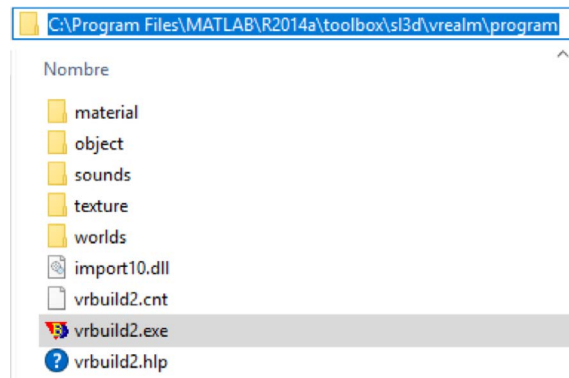


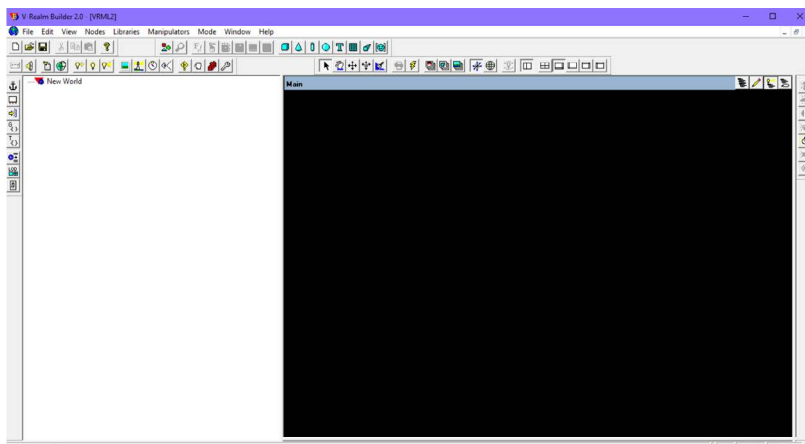
Figura 33  
V-Realm Builder.  
Fuente: elaboración propia.

Es posible acceder al editor de realidad virtual (V-Realm Builder) de dos formas diferentes, la primera forma es buscar la aplicación en la carpeta donde ha sido instalada. La ruta de instalación regular, dependiendo de la versión de Matlab, se muestra en la Figura 34. La segunda forma será mencionada en la Sesión 4.2 (Ver Figura 51).



*Figura 34*  
Ruta de instalación de V-Realm Builder  
Fuente: elaboración propia.

Una vez abierta la aplicación, se procede a crear un nuevo mundo, dando clic en ‘Archivo’ después en ‘Nuevo’, o presionando Ctrl+N. Se visualizará la siguiente pantalla:



*Figura 35*  
Nuevo mundo en V-Realm Builder.  
Fuente: elaboración propia.

Después, se da clic en ‘Insert Background’ para agregar el ambiente o fondo (Figura 36). Este ambiente es fácilmente editable haciendo uso de propiedades como ‘groundColor’ y ‘skyColor’, como se muestra en la Figura 37.

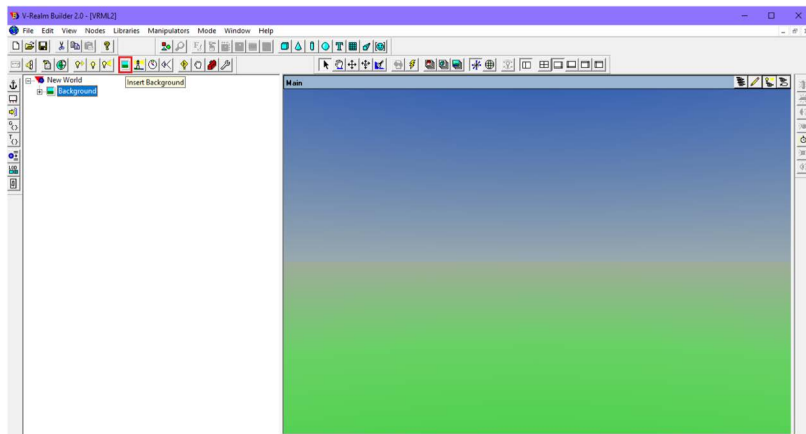


Figura 36  
Insertar ambiente  
Fuente: elaboración propia.

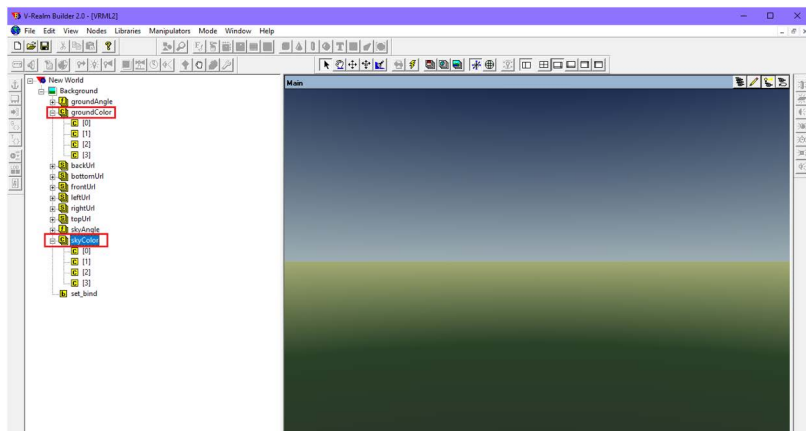


Figura 37  
Modificación color de cielo y terreno del ambiente  
Fuente: elaboración propia.

Una vez modificado el ambiente con las condiciones deseadas, es hora de iniciar el proceso de creación del entorno, por ejemplo, agregando figuras prediseñadas. Como se observa en la Figura 38, se ha agregado una caja (paso 1), posteriormente, se ha modificado el nombre, de “Transform” a “Caja1” (paso 2). A esta caja se le puede modificar su apariencia (paso 3) y geometría (paso 4) a gusto.

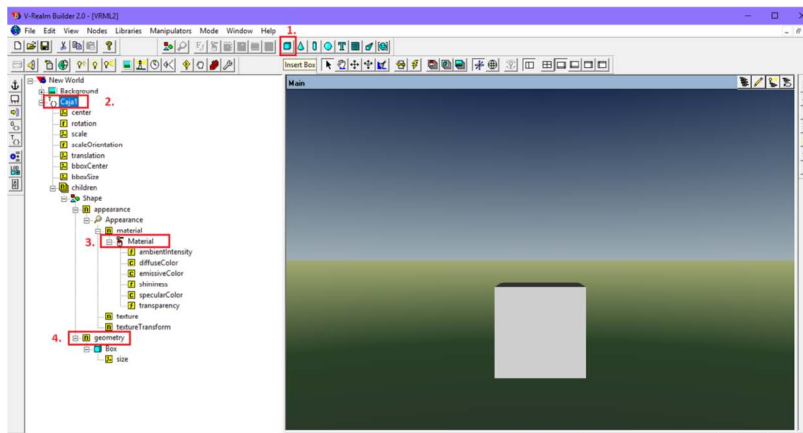


Figura 38  
Modificación de apariencia y geometría de elemento  
Fuente: elaboración propia.

Como lo muestra la Figura 39, para agregar un nuevo elemento, que esté relacionado con el anterior, es necesario hacer clic en el 'children' del primer elemento (paso 1), esto hará que el nuevo elemento aparezca en el centro del predecesor compartiendo los ejes. En este caso, se ha agregado un cilindro (paso 2), se le ha asignado un nombre (paso 3) y se ha trasladado (paso 4) con respecto al eje Y dos unidades hacia arriba (paso 5). Cabe destacar que el eje X de la interfaz se encuentra en forma horizontal, el eje Y en forma vertical, y el eje Z es la dimensión que le da profundidad a los elementos.

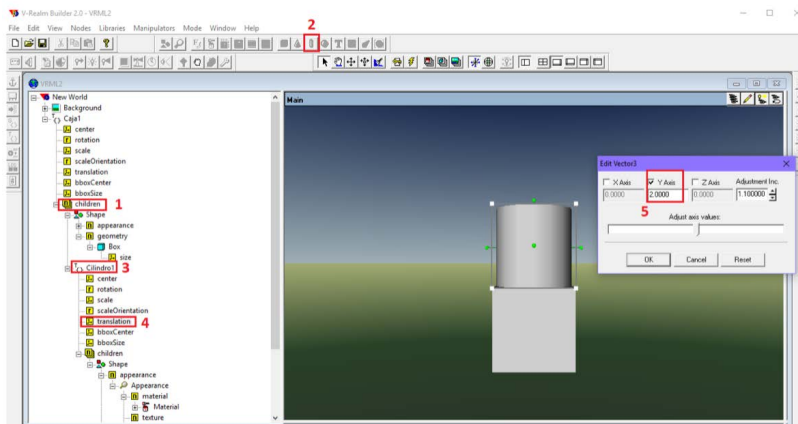


Figura 39  
Nuevo elemento agregado a través del 'children' del primer elemento  
Fuente: elaboración propia.

Finalmente, como lo muestra la Figura 40, se ha agregado un nuevo cilindro que está relacionado con el anterior, es decir, se ha creado a partir del 'children' del segundo elemento (Cilindro1), se le ha asignado un nombre (paso 1), se ha modificado su color (paso 2), su radio (paso 3), se ha trasladado con respecto al eje Y (hacia arriba) hasta quedar encima del segundo cilindro (paso 4) y finalmente se ha rotado (paso 5) 90° con respecto al eje Z (paso 6).

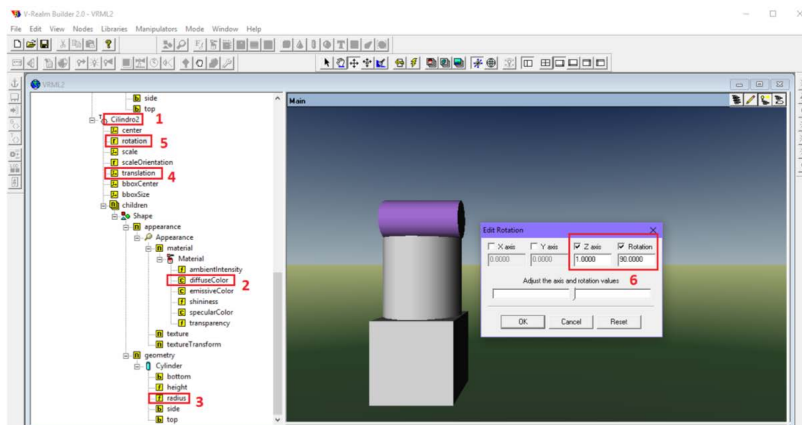


Figura 40  
Agregar nuevo elemento con rotación  
Fuente: elaboración propia.

Estas son las operaciones básicas que permitirán la construcción de los robots con el objetivo de probar el control y el respectivo seguimiento de trayectorias.

### Ejercicio de evaluación 4.1. Construcción de robot en V-Realm Builder

Construir el robot SCARA con su respectivo ambiente en el V-Realm Builder.

#### Solución ejercicio de evaluación 4.1.

A continuación, se procede a construir el robot SCARA en el entorno de realidad virtual 'V-Realm Builder'.

Lo primero es construir el ambiente, insertando un 'Background' y modificando el color del cielo y de la tierra, como se observa en la Figura 41.

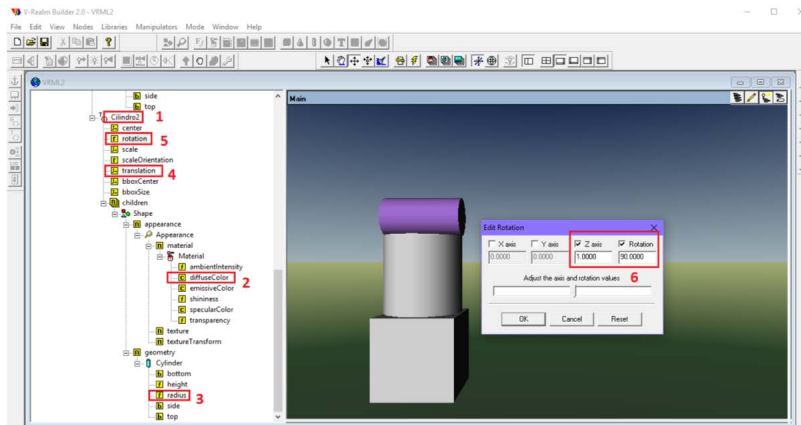


Figura 41  
Ambiente para robot  
Fuente: elaboración propia.

Después, se procede a agregar la base del robot considerando las medidas (en unidades según el sistema internacional) y los parámetros dinámicos del modelo dinámico en el **Anexo 1**, como se muestra en la Figura 42.

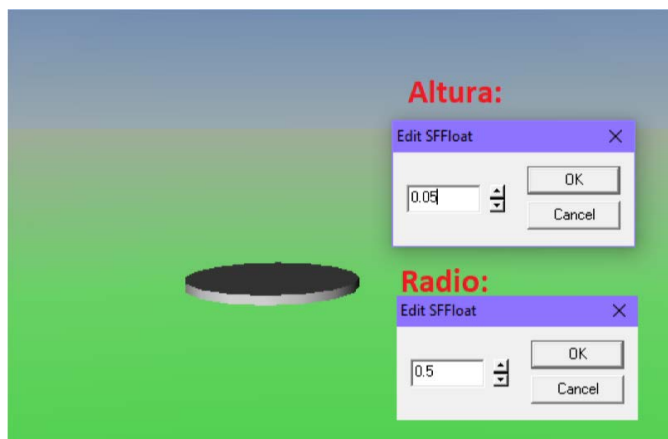


Figura 42  
Altura y radio de la base del robot.  
Fuente: elaboración propia.

Luego, se agrega la primera articulación a través del 'children' de la base, como se aprecia en la Figura 43.

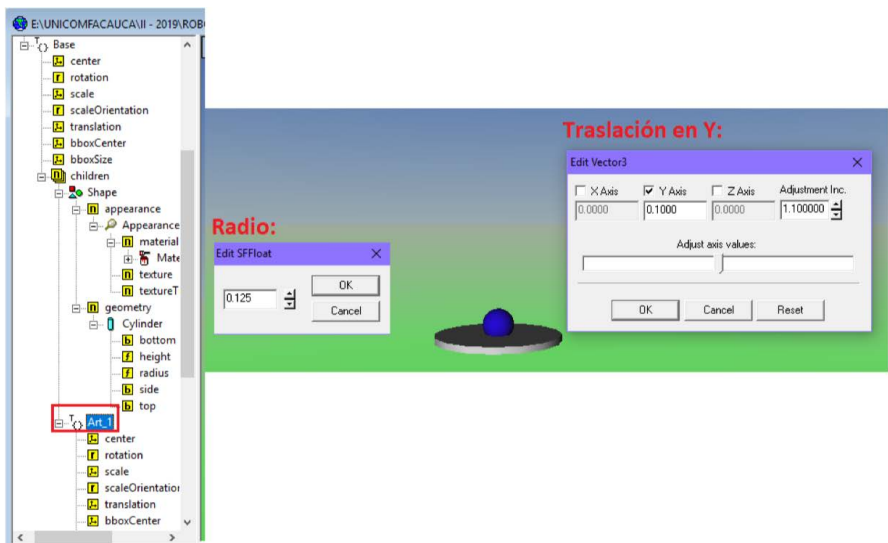


Figura 43  
Primera articulación robot SCARA.  
Fuente: elaboración propia.

Después, se agrega el primer cuerpo a través del 'children' de la primera articulación, como se aprecia en la Figura 44.

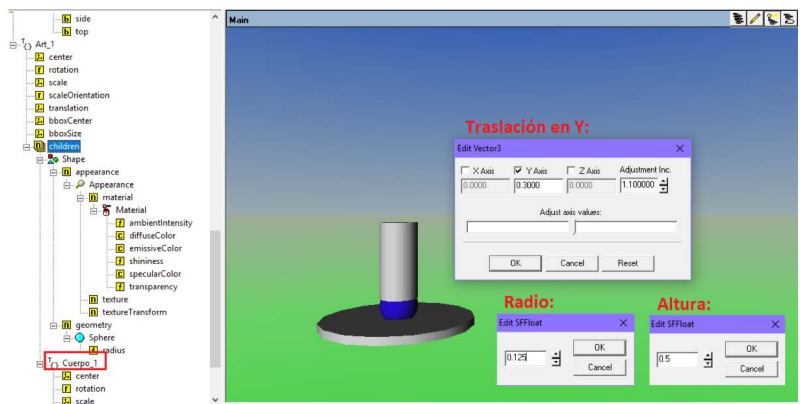


Figura 44  
Cuerpo 1 del robot SCARA  
Fuente: elaboración propia.

Así sucesivamente para el resto de los cuerpos y articulaciones del robot SCARA, como se aprecia en las Figuras 45-47.

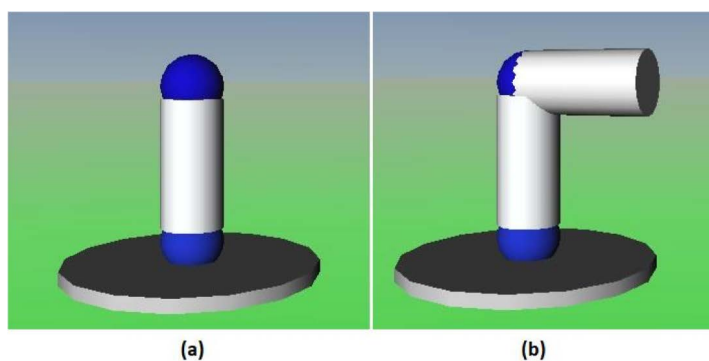


Figura 45

(a) Articulación 2 del Robot SCARA agregada al modelo.

(b) Cuerpo 2 del Robot SCARA agregado al modelo.

Fuente: elaboración propia.

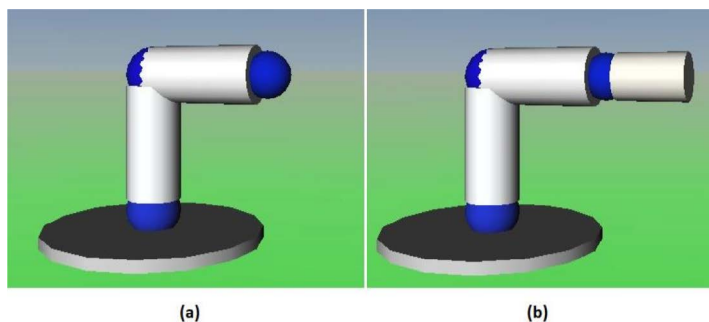


Figura 46

(a) Articulación 3 del Robot SCARA agregada al modelo.

(b) Cuerpo 3 del Robot SCARA agregado al modelo.

Fuente: elaboración propia.

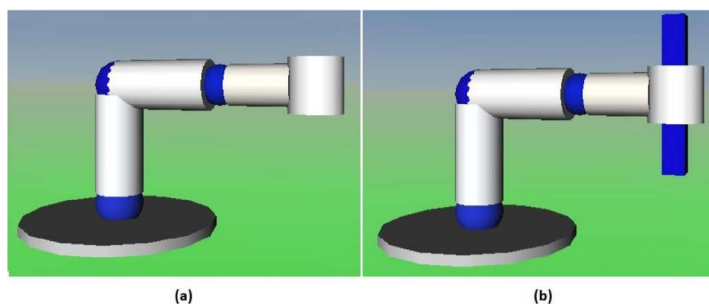


Figura 47

(a) Articulación 4 del Robot SCARA agregada al modelo.

(b) Cuerpo 4 del Robot SCARA agregado al modelo.

Fuente: elaboración propia.

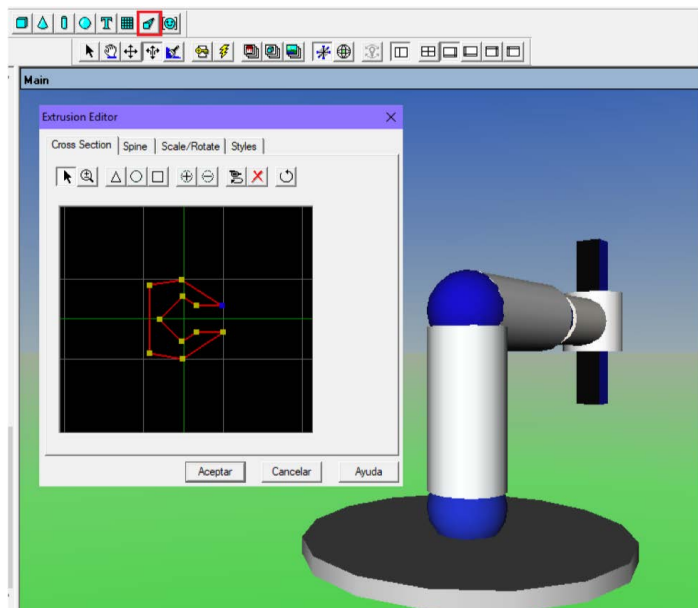


Figura 48  
Agregar órgano terminal al robot SCARA.  
Fuente: elaboración propia.

Finalmente, se modifican los parámetros de dimensión, escala, y traslación para ubicarlo en el respectivo lugar, como se muestra en la Figura 49.

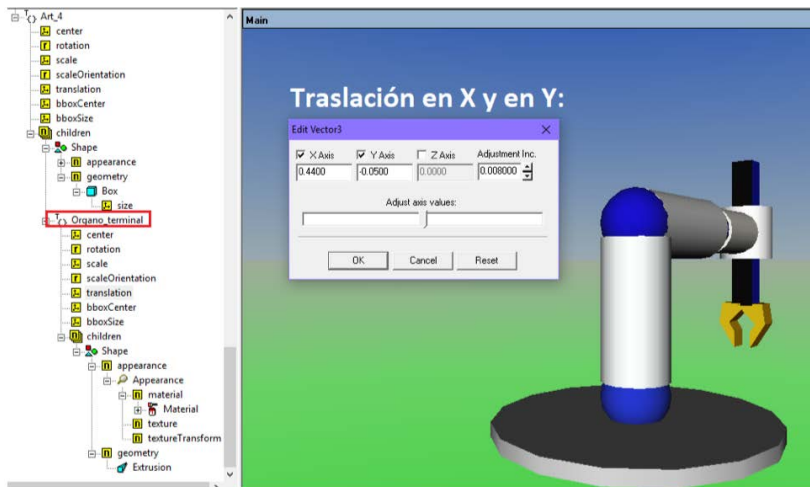


Figura 49  
Parámetros de ajuste del órgano terminal del Robot SCARA.  
Fuente: elaboración propia.

De esta manera, se ha construido el robot SCARA con su respectivo órgano terminal. Se procede ahora a guardar el modelo con la extensión VRML (.wrl).

### **Ejercicio práctico 4.1. Construcción de robot en V-Realm Builder**

Construir los Robots del Ejercicio práctico 1.2. con su respectivo entorno en el V-Realm Builder.

### **Introducción a Simulink 3D Animation**

La herramienta ‘VR Sink’ de la librería Simulink 3D Animation (Figura 50), permite a los sistemas construidos en Simulink interactuar con los modelos creados en el V-Realm Builder. A través de este bloque se puede acceder directamente a la aplicación de edición 3D en donde se creará un “nuevo mundo” (1: ‘New’) o se cargará un entorno, ambiente o modelo previamente construido en el V-Realm Builder (2: ‘Browse’), como se aprecia en la Figura 51.

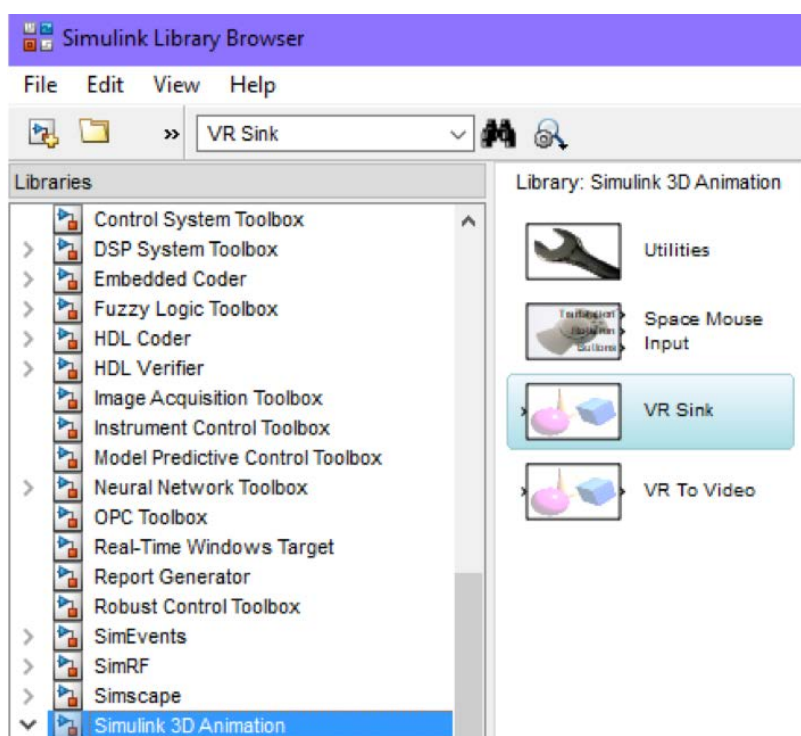


Figura 50  
Simulink 3D Animation - VR Sink  
Fuente: elaboración propia.

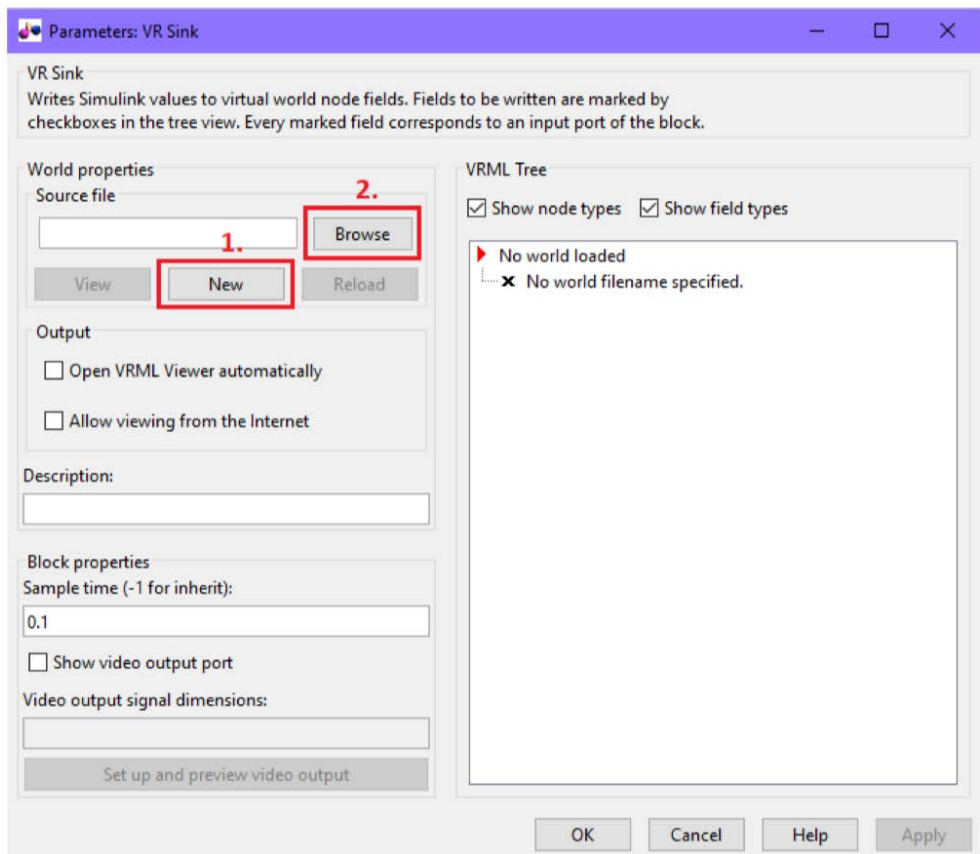


Figura 51  
Creación o carga de parámetros en VR Sink.  
Fuente: elaboración propia.

#### **Ejercicio de evaluación 4.2. Carga de modelo en VR Sink**

Cargar el modelo del robot SCARA de V-Realm Buidier creado en el Ejercicio de evaluación 4.1.

#### **Solución ejercicio de evaluación 4.2.**

A continuación, se procede a agregar el modelo del robot SCARA creado en el Ejercicio de evaluación 4.1. al sistema de control con controlador CTC articular del Ejercicio de evaluación 3.3. a través de la herramienta 'VR Sink' de Simulink.

Como se aprecia en la Figura 52, el primer paso es dar doble clic al bloque de VR Sink y buscar el archivo (.wrl) para agregarlo, después, se asigna el tiempo de muestreo predeterminado (paso 2).

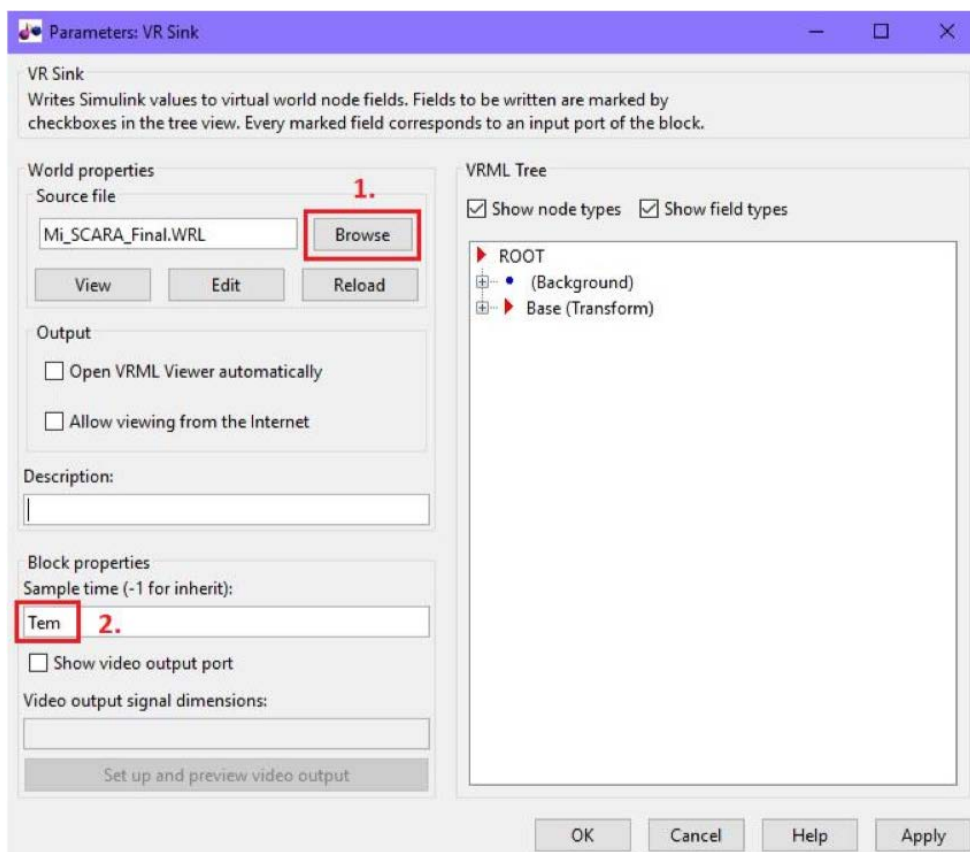


Figura 52

Carga de modelo SCARA y tiempo de muestreo en VR Sink.

Fuente: elaboración propia.

Posteriormente, se asigna a cada articulación del robot la función correspondiente. Por lo tanto, en el recuadro de la derecha de la Figura 53 se expande la lista de “Base” (paso 1), se expande la lista de “Art\_1” (paso 2) y se selecciona “rotación” (paso 3), teniendo en cuenta que la primera articulación del Robot SCARA es de tipo rotoide. Se procede de igual forma para las articulaciones rotoides dos y tres (Art\_2 y Art\_3), y para la articulación cuatro, que es de tipo prismática o traslacional, se selecciona su respectiva función, como se aprecia en la Figura 54, luego, se aplican y se aceptan los cambios.

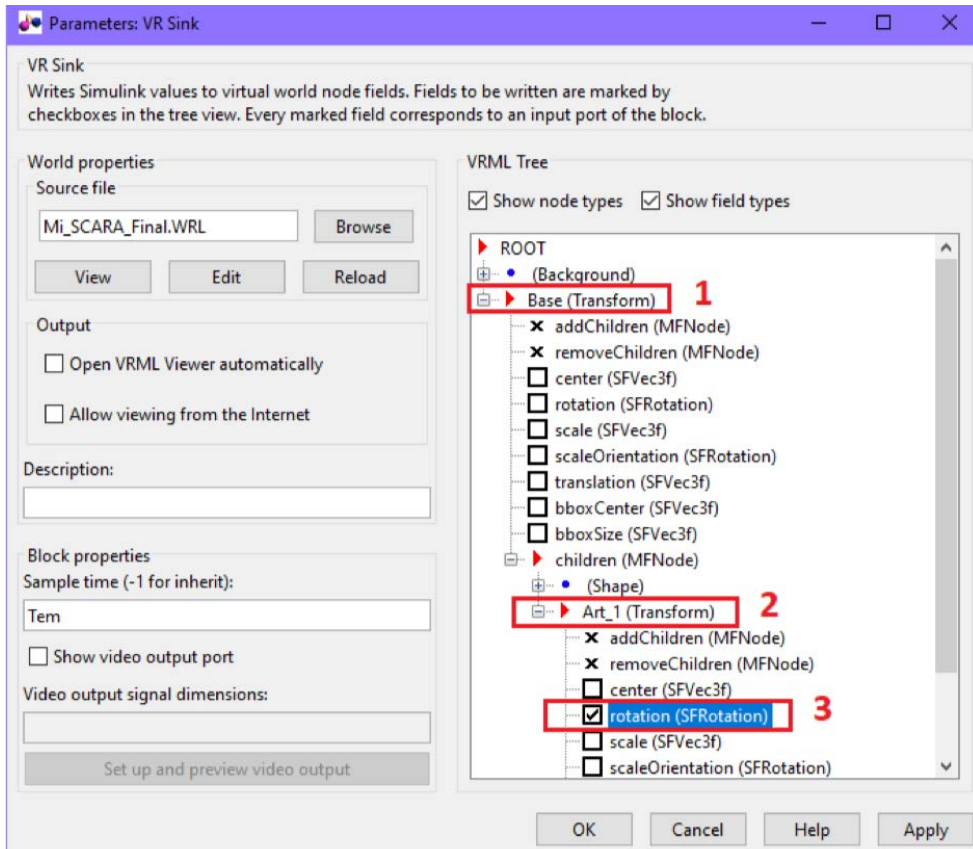


Figura 53  
Asignación de función rotacional a primera articulación del Robot SCARA  
Fuente: elaboración propia.

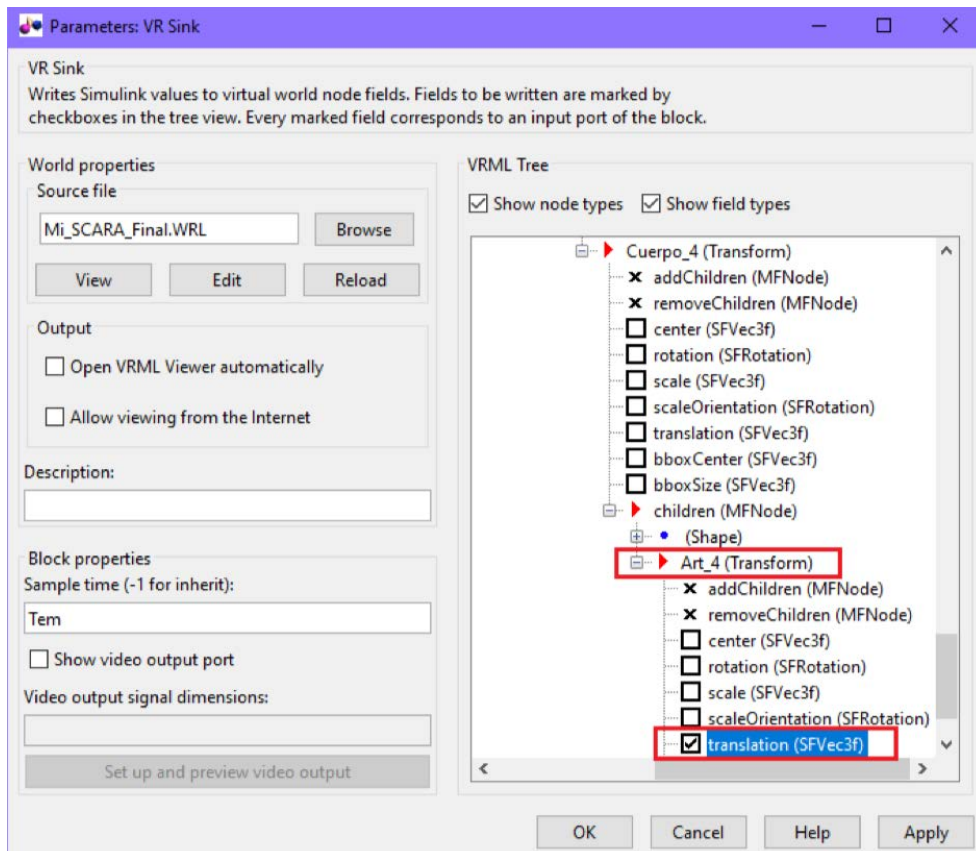


Figura 54

Asignación de función traslacional a cuarta articulación del Robot SCARA  
Fuente: elaboración propia.

En la Figura 55 se muestra el resultado final de haber asignado la respectiva función a cada una de las articulaciones del Robot SCARA en el bloque 'VR Sink'.

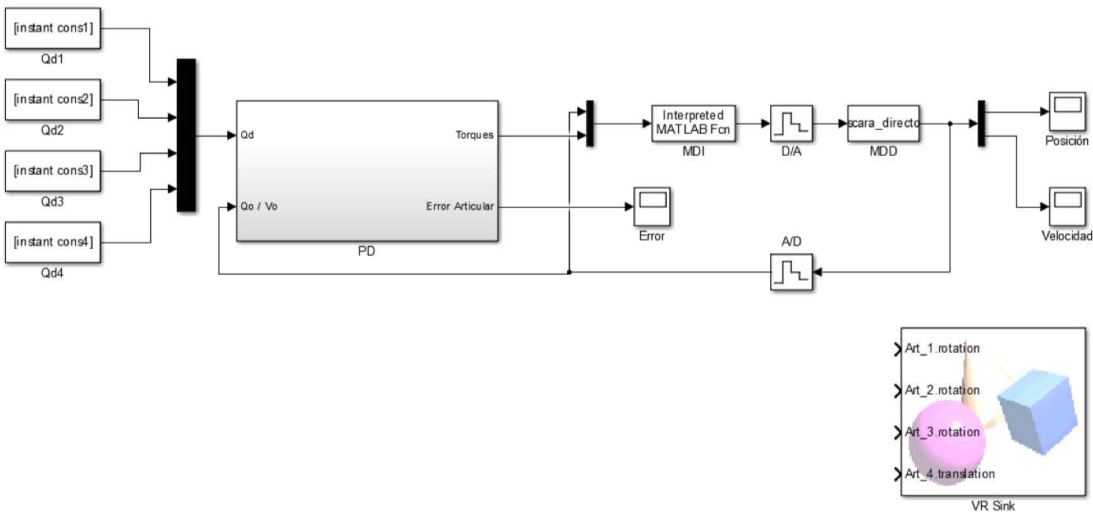


Figura 55  
VR Sink con parámetros del Robot SCARA definidos  
Fuente: elaboración propia.

Finalmente, se agregan los parámetros matriciales para habilitar las articulaciones del modelo teniendo en cuenta la posición de salida del sistema robótico, como se aprecia en la Figura 56.

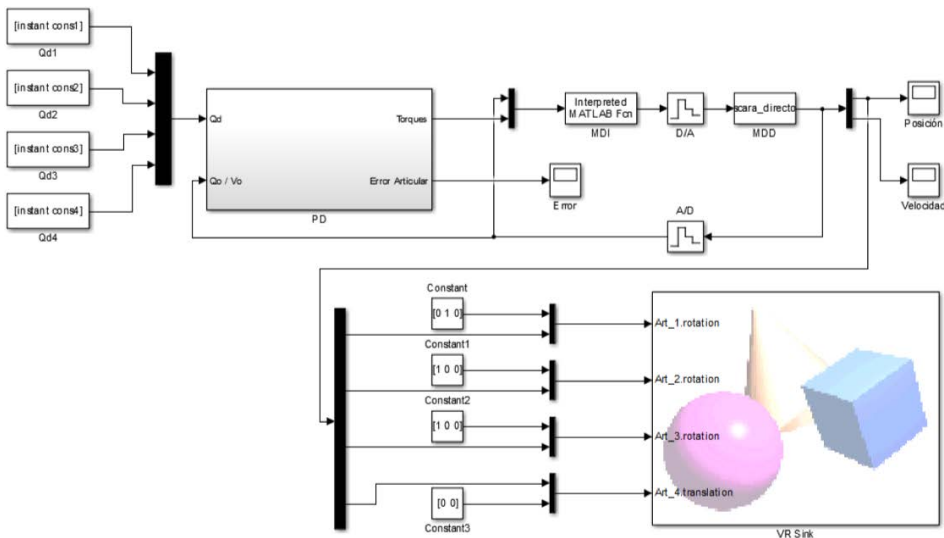


Figura 56  
Sistema de control robótico con Controlador CTC articular y VR Sink del Robot SCARA.  
Fuente: elaboración propia.

Ahora, se procede a ejecutar los archivos de la simulación empezando por el 'inicio\_CTC\_articular.m' de Matlab donde se encuentra cargada la trayectoria que el robot SCARA deberá seguir. Después, se ejecuta el archivo de Simulink 'SCARA\_CTC\_ARTICULAR.slx' donde está el diagrama de bloques del sistema de control. De esta manera, se abre la interfaz de la Figura 57, en la cual se podrá visualizar la ejecución de la trayectoria cargada, asimismo, las demás trayectorias del Anexo 2 dando clic al botón de ejecución ("Start simulation").

*Nota:* todos los archivos de la simulación deben estar guardados en la misma carpeta.

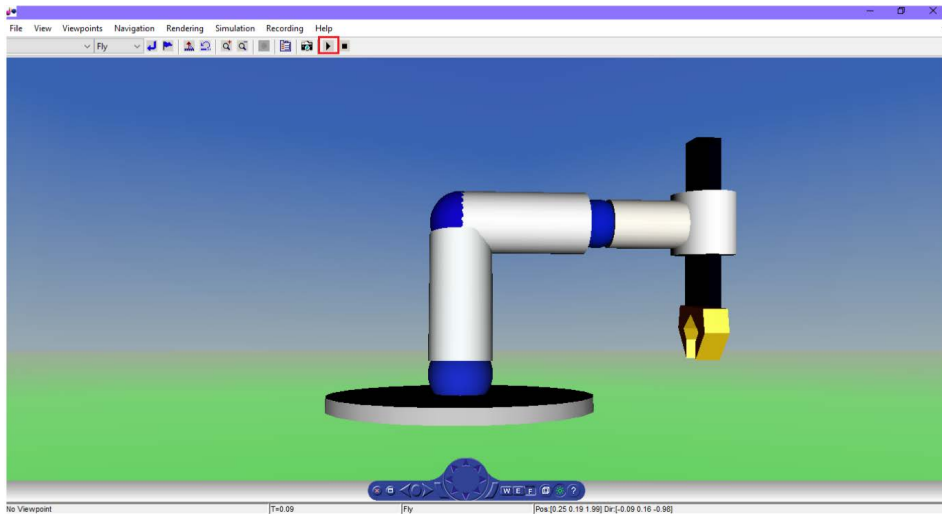


Figura 57

Ejecución de la simulación en el entorno 3D de realidad virtual

Fuente: elaboración propia.

### **Ejercicio práctico 4.2. Carga de modelos en VR Sink**

Cargar los modelos de los Robots del Ejercicio práctico 1.2. creados en el Ejercicio práctico 4.1. y probar las trayectorias del Anexo 2.

## GLOSARIO

**Articulación:** relación mecánica entre dos eslabones que está impulsada por un motor cuya función es provocar el movimiento angular o lineal de uno de los cuerpos que conecta.

**Concatenación:** referente a la unión de vectores o vectores con matrices, generalmente, con la necesidad de agregar un factor de escalamiento unitario que complete la dimensión de uno de los miembros de la matriz.

**Consigna articular:** se denomina así a toda trayectoria donde se realizan pruebas de seguimiento de trayectorias por articulación, es decir, para cada articulación se asigna posición y velocidad deseada y se verifica a través del error articular el cumplimiento de estos.

**Consigna cartesiana:** se denomina así a la trayectoria asignada al órgano terminal del robot para que lleve a cabo una tarea generalmente de tipo industrial.

**Coordenada geométrica:** consiste en la localización y orientación de un cuerpo en términos de coordenadas cartesianas.

**Eslabón:** es el cuerpo o extremidad de un brazo robótico. Dos eslabones se unen a través de una articulación.

**Factor de escalamiento:** sirve para agregar una dimensión a un vector, generalmente, se concatena al final de un vector.

**Grado de libertad:** referente a las dimensiones individuales de desplazamiento, ya sea de tipo rotacional o traslacional de una articulación.

**Método de Lagrange:** también conocido como multiplicadores LaGrange, permite relacionar funciones de múltiples variables que se requieren maximizar o minimizar.

**Matriz de transformación:** concatenación de la matriz de orientación con el vector de posición con respecto a una articulación.

**Momento de inercia:** es una medida de la inercia rotacional de un cuerpo.

**Prismática:** movimiento lineal de un eslabón a lo largo de un eje.

**Rotoide:** giro o movimiento angular de un eslabón alrededor de un eje.

**Transformación homogénea:** es un conjunto de parámetros dispuestos en una matriz para representar la ubicación y orientación de un objeto cuando ha sufrido un cambio de posición con respecto a su plano de referencia.

**Transpuesta:** consiste en reemplazar filas por columnas de una matriz A para formar una nueva matriz llamada transpuesta de A.

**V-Realm Builder:** es una herramienta de edición 3D para crear y editar escenarios de realidad virtual.

## REFERENCIAS

- Álvarez, F., Muñoz, J. y Osorio, B. (2007, del 18 al 21 de junio) Propuesta para adaptar los objetos de aprendizaje a un modelo educativo institucional [conferencia]. *Virtual Educa Brasil*, 2007. São José dos Campos, Brasil. <http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:19203/n03osorio07.pdf>
- Aguilar, M. (2012). Aprendizaje y tecnologías de información y comunicación: Hacia nuevos escenarios educativos. *Revista Latinoamericana de Ciencias sociales, niñez y juventud*, 10 (2), 801-811. <http://www.scielo.org.co/pdf/rlcs/v10n2/v10n2a02.pdf>
- Bodner, J., Wykypiel, H., Wetscher, G., y Schmid, T. (2004). First experiences with the da Vinci™ operating robot in thoracic surgery, *European Journal of Cardio-Thoracic Surgery*, 25(5), 844–851. <https://doi.org/10.1016/j.ejcts.2004.02.001>
- Cabero, J. (coord.). (2000). *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación*. Síntesis.
- Chan, M. (2004). Tendencias en el diseño educativo para entornos de aprendizaje digitales. *Revista digital universitaria* 5(10), 2-26. [https://www.revista.unam.mx/vol.5/num10/art68/nov\\_art68.pdf](https://www.revista.unam.mx/vol.5/num10/art68/nov_art68.pdf)
- Coll, C., Mauri, M., y Onrubia J. (2008). Análisis de los usos reales de las tic en contextos educativos formales: una aproximación socio-cultural. *Revista Electrónica de investigación educativa*, 10(1), 1-18. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=15510101>
- Erazo, E. y Muñoz, G. (2007). Las mediaciones tecnológicas en los procesos de subjetivación juvenil: interacciones en Pereira y Dosquebradas, Colombia. *Revista Latinoamericana de Ciencias sociales, niñez y juventud*, 5(2), 723-754. <http://biblioteca.clacso.edu.ar/gsd/collect/co/co-001/index/assoc/D8587.dir/ArtEdgarDiegoErazoCaicedo.pdf>
- Feo, R. (2009). *Estrategias Instruccionales para Promover el Aprendizaje Estratégico en Estudiantes del Instituto Pedagógico de Miranda José Manuel Siso Martínez*. [Trabajo de grado, Maestría, Instituto Pedagógico de Miranda José Manuel Siso Martínez]. Miranda.
- Feo, R. (2010). Orientaciones básicas para el diseño de estrategias didácticas. Instituto Pedagógico de Miranda José Manuel Siso Martínez. *Revista electrónica Tendencias pedagógicas*, 16, 221-236 <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3342741>
- Galvis-Panqueva, A. (2008). La PIOLA y el desarrollo profesional docente con apoyo de tecnologías de información. *Tecnología y comunicación educativas*, 46(22), 58-86. <http://investigacion.ilce.edu.mx/tyce/46/pdfs/articulo5.pdf>
- Khalil, W. y Dombre, E. (2002). *Modeling, Identification and Control of Robots*. Butterworth-Heinemann.

- Lee, K., Rao, J., and Youn, Y. (2009). Endoscopic Thyroidectomy With the da Vinci Robot System Using the Bilateral Axillary Breast Approach (BABA) Technique: Our Initial Experience, *Surgical Laparoscopy, Endoscopy & Percutaneous Techniques*, 19(3), 71-75. DOI: 10.1097/SLE.0b013e3181a4ccae
- Lozano, R. (2011). De las tic a las tac: tecnologías del aprendizaje y del conocimiento. *Anuario ThinkEPI*, 5(1), 45-47.
- Marzano, R., y Pickering, D. (Ed.). (1998). *Dimensiones del aprendizaje, manual para el maestro*. ITESO.
- McLeod, I. K. y Melder, P. C. (2005). Da Vinci Robot-Assisted Excision of a Vallecular Cyst: A Case Report. *Ear, Nose & Throat Journal*, 84(3), 170-172.
- Moya M. (2013). De las tics a las tacs: la importancia de crear contenidos educativos digitales. *Revista Didáctica, innovación y multimedia*, 27, 1-15. <https://raco.cat/index.php/DIM/article/view/275963>
- Muñoz Rojas, H. A. (2016). Mediaciones tecnológicas: nuevos escenarios de la práctica pedagógica. *Praxis & saber*, 7(13), 199-221.
- Néricsi, I. (1973). *Hacia una didáctica general dinámica*. Kapelusz.
- Pérez, F. G., & Castillo, D. P. (1996). *La mediación pedagógica: apuntes para una educación a distancia alternativa* (3a ed.). Ediciones CICCUS-La Crujía.
- Ramírez Montoya, M., García Torres, R. y Contreras Gelves, G. (2010). Uso de simuladores como recurso digital para la transferencia de conocimiento. *Apertura*, 2(1). <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=68820841008>
- Ruiz, S. y Burbano, C. (2019). *Guía práctica para el proceso de aprendizaje de asignaturas Robótica y Electiva general II - primera parte*. Corporación Universitaria Comfacauc, Popayán-Cauca, Colombia.
- Sánchez, E. (2008). Las tecnologías de información y comunicación (tic) desde una perspectiva social. *Revista electrónica Educare*, 12, 155-162. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194114584020>
- Sandoval Barros, R. E. (2011). Las mediaciones tecnológicas en el campo educativo. *Educación y humanismo*, 13(21), 162-173. <http://revistas.unisimon.edu.co/index.php/educacion/article/view/2269>
- Siciliano, B. and Khatib, O. (Eds.). (2008). *Handbook of Robotics*. Springer-Verlag.
- Terrazas, R. y Silva R. (2013). La educación y la sociedad del conocimiento. *PERSPECTIVAS*, (32), 145-168. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=425941262005>
- Vivas, O. (2010). Diseño y control de robots industriales: Teoría y práctica. Elaleph.com
- Zubiría, S. (2001). *De la escuela nueva al constructivismo*. Magisterio editorial.

## ANEXO 1

· Código en Matlab del modelo dinámico inverso del Robot scara (scara\_inverso.m).

```
function GAM = scara_inverso(pos1,pos2,pos3,pos4,vel1,vel2,vel3,vel4,w1,w2,w3,w4)

%% Parámetros Dinámicos supuestos para el Robot SCARA:

G3= 9.80665;
M4=1.94;
d2=0.47;
d3=0.31;
r4=0.203;
ZZ1R=3.35;
ZZ2R=0.062;
ZZ3R=0.101;
MX2R=2*0.124;
MX3R=0.211;
MY3R=0.11;
MY2=0.0014;

FV1=0;
FV2=0;
FV3=0;
FV4=0;
FS1=0;
FS2=0;
FS3=0;
FS4=0;
```

```
IA2=0;  
CZ1=0;  
FX2=0;  
FY2=0;  
FX3=0;  
FY3=0;  
FZ3=0;  
CZ3=0;  
CZ4=0;  
FX4=0;  
FY4=0;  
FZ4=0;  
IA3=0;  
IA4=0.044;
```

```
t2=pos2;  
t3=pos3;  
QP1=vel1;  
QP2=vel2;  
QP3=vel3;  
QP4=vel4;  
QDP1=w1;  
QDP2=w2;  
QDP3=w3;  
QDP4=w4;
```

```
S2=sin(t2);  
C2=cos(t2);  
S3=sin(t3);
```

```

C3=cos(t3);
DV331=-QP1.^2;
No31=QDP1.*ZZ1R;
W32=QP1 + QP2;
WP32=QDP1 + QDP2;
DV332=-W32.^2;
VSP12=d2.*DV331;
VSP22=d2.*QDP1;
VP12=C2.*VSP12 + S2.*VSP22;
VP22=-(S2.*VSP12) + C2.*VSP22;
F12=DV332.*MX2R - MY2.*WP32;
F22=DV332.*MY2 + MX2R.*WP32;
No32=WP32.*ZZ2R;
W33=QP3 + W32;
WP33=QDP3 + WP32;
DV333=-W33.^2;
VSP13=d3.*DV332 + VP12;
VSP23=VP22 + d3.*WP32;
VP13=C3.*VSP13 + S3.*VSP23;
VP23=-(S3.*VSP13) + C3.*VSP23;
F13=DV333.*MX3R - MY3R.*WP33;
F23=DV333.*MY3R + MX3R.*WP33;
No33=WP33.*ZZ3R;
VP34=-G3 + QDP4;
F14=M4.*VP13;
F24=M4.*VP23;
F34=M4.*VP34;
E14=F14 + FX4;
E24=F24 + FY4;

```

```

E34=F34 + FZ4;
E13=E14 + F13 + FX3;
E23=E24 + F23 + FY3;
N33=CZ3 + CZ4 + No33 - MY3R.*VP13 + MX3R.*VP23;
FDI13=C3.*E13 - E23.*S3;
FDI23=C3.*E23 + E13.*S3;
E12=F12 + FDI13;
E22=F22 + FDI23;
N32=d3.*FDI23 + N33 + No32 - MY2.*VP12 + MX2R.*VP22;
FDI22=C2.*E22 + E12.*S2;
N31=d2.*FDI22 + N32 + No31;
GAM1=N31 + FV1.*QP1 + FS1.*sign(QP1);
GAM2=N32 + IA2.*QDP2 + FV2.*QP2 + FS2.*sign(QP2);
GAM3=N33 + IA3.*QDP3 + FV3.*QP3 + FS3.*sign(QP3);
GAM4=E34 + IA4.*QDP4 + FV4.*QP4 + FS4.*sign(QP4);

GAM(1) = GAM1;
GAM(2) = GAM2;
GAM(3) = GAM3;
GAM(4) = GAM4;

```

· Código en Matlab del modelo dinámico directo del Robot SCARA (scara\_directo.m).

```

function [sys, x0,str,ts] = f_scara(t,x,u,flag,QI)

switch flag,

%%%%%%%%%%%%%%
% Initialization %
%%%%%%%%%%%%%%

```

```

case 0,
    [sys,x0,str,ts]= mdlInitializeSizes(QI); %Especifica el número de entradas,salidas, estados,
    parámetros y otras características de la s-function

    %% Derivadas

case 1,

    sys=mdlDerivatives(t,x,u); %Calcula las derivadas de la s-function

    %% Salidas

case 3,
    sys=mdlOutputs(t,x,u); %Calcula las señales de salida que emite la s-function.

    %% Banderas sin función

case { 2, 4, 9 },
    sys = [];

    %% Banderas inesperadas

otherwise
    error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]);

end

%% Función de inicialización del modelo dinámico

```

% Regresa los tamaños de los vectores, condiciones iniciales y tiempos de muestreo para la S-function.

**function** [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes(QI)

sizes = simsizes;

sizes.NumContStates = 8; % 8 estados continuos(4 velocidades y 4 posiciones)

sizes.NumDiscStates = 0;

sizes.NumOutputs = 8; % 8 estados derivados (4 velocidades y 4 posiciones)

sizes.NumInputs = 4; % número de entradas (torques de entrada)

sizes.DirFeedthrough = 0;

sizes.NumSampleTimes = 1;

sys = simsizes(sizes);

%

%% Definir condiciones iniciales

%

%x0=[QI(1);0;QI(2);0];

x0=[QI(1);QI(2);QI(3);QI(4);0;0;0;0]; % x=[q1,q2,q3,q4,qp1,qp2,qp3,qp4] ESTADOS INICIALES

%

% str es siempre una matriz vacía

%

str = [];

%

% inicializar el arreglo matricial de tiempos de muestreo:

%

ts = [0 0];

```
%% Función de inicialización de las derivadas del modelo dinámico
```

```
% Regresa las derivadas para los estados continuos.
```

```
function sys=mdlDerivatives(t,x,u)
```

```
%% Parámetros Dinámicos supuestos para el Robot SCARA:
```

```
G3= 9.80665;
```

```
M4=1.94;
```

```
d2=0.47;
```

```
d3=0.31;
```

```
r4=0.203;
```

```
ZZ1R=3.35;
```

```
ZZ2R=0.062;
```

```
ZZ3R=0.101;
```

```
MX2R=2*0.124;
```

```
MX3R=0.211;
```

```
MY3R=0.11;
```

```
MY2=0.0014;
```

```
FV1=0;
```

```
FV2=0;
```

```
FV3=0;
```

```
FV4=0;
```

```
FS1=0;
```

```
FS2=0;
```

```
FS3=0;
```

```
FS4=0;
```

```

IA2=0;
CZ1=0;
FX2=0;
FY2=0;
FX3=0;%
FY3=0;%
FZ3=0;%
CZ3=0;%
CZ4=0;%
CX3=0;%
CX4=0;%
CY3=0;%
CY4=0;%
FX4=0;%
FY4=0;%
FZ4=0;%
IA3=0;%
IA4=0.044;%

%% TORQUES
GAM1=u(1); % TORQUE 1
GAM2=u(2); % TORQUE 2
GAM3=u(3); % TORQUE 3
GAM4=u(4); % TORQUE 4

%% Funciones trigonométricas
S1=sin(x(1));
C1=cos(x(1));
S2=sin(x(2));
C2=cos(x(2));

```

```

S3=sin(x(3));
C3=cos(x(3));

%% Derivadas de las posiciones
QP1=x(5);
QP2=x(6);
QP3=x(7);
QP4=x(8);

%% MATRIZ DE INERCIA - VECTOR DE GRAVEDAD
W32=QP1 + QP2;
JPR132=d2.*S2;
JPR232=C2.*d2;
W33=QP3 + W32;
JPR133=d3.*S3;
JPR233=C3.*d3;
JW31=QP1.*ZZ1R;
JW32=W32.*ZZ2R;
SW12=-(MX2R.*W32.^2);
SW22=-(MY2.*W32.^2);
LW12=-(C2.*d2.*QP1.^2);
LW22=d2.*QP1.^2.*S2;
JW33=W33.*ZZ3R;
SW13=-(MX3R.*W33.^2);
SW23=-(MY3R.*W33.^2);
LW13=-(C3.*d3.*W32.^2);
LW23=d3.*S3.*W32.^2;
JD4=1./(IA4 + M4);
JU64=JD4.*M4;
GW4=-FZ4 + GAM4 - FV4.*QP4 - FS4.*sign(QP4);

```

```

GK664=M4 - JU64.*M4;
VS64=GW4.*JU64;
AP64=FZ4 + VS64;
GX154=-(M4.*r4);
GX244=M4.*r4;
TKT114=-(GX154.*r4);
TKT514=-(M4.*r4);
TKT224=GX244.*r4;
TKT424=M4.*r4;
VBE13=-CX3 - CX4 + FY4.*r4;
VBE23=-CY3 - CY4 - FX4.*r4;
VBE33=-CZ3 - CZ4;
VBE43=-FX3 - FX4 - SW13;
VBE53=-FY3 - FY4 - SW23;
VBE63=-AP64 - FZ3;
JD3=1./(IA3 + ZZ3R);
JU33=JD3.*ZZ3R;
JU43=-(JD3.*MY3R);
JU53=JD3.*MX3R;
GW3=GAM3 - FV3.*QP3 + VBE33 - FS3.*sign(QP3);
GK333=ZZ3R - JU33.*ZZ3R;
GK343=-MY3R + JU33.*MY3R;
GK353=MX3R - JU33.*MX3R;
GK433=-MY3R - JU43.*ZZ3R;
GK443=M4 + JU43.*MY3R;
GK453=-(JU43.*MX3R);
GK533=MX3R - JU53.*ZZ3R;
GK543=JU53.*MY3R;
GK553=M4 - JU53.*MX3R;
NG13=LW23.*TKT514;

```

$NG23=LW13.*TKT424;$   
 $NG33=GK343.*LW13 + GK353.*LW23;$   
 $NG43=GK443.*LW13 + GK453.*LW23;$   
 $NG53=GK543.*LW13 + GK553.*LW23;$   
 $VS33=GW3.*JU33 + NG33;$   
 $VS43=GW3.*JU43 + NG43;$   
 $VS53=GW3.*JU53 + NG53;$   
 $AP13=NG13 - VBE13;$   
 $AP23=NG23 - VBE23;$   
 $AP33=-VBE33 + VS33;$   
 $AP43=-VBE43 + VS43;$   
 $AP53=-VBE53 + VS53;$   
 $GX113=C3.*TKT114;$   
 $GX123=-(S3.*TKT224);$   
 $GX143=-(S3.*TKT424);$   
 $GX153=C3.*TKT514;$   
 $GX163=C3.*MY3R + MX3R.*S3;$   
 $GX213=-(d3.*MY3R) + S3.*TKT114;$   
 $GX223=d3.*MX3R + C3.*TKT224;$   
 $GX243=C3.*TKT424;$   
 $GX253=S3.*TKT514;$   
 $GX263=-(d3.*GK664) - C3.*MX3R + MY3R.*S3;$   
 $GX313=JPR233.*TKT514;$   
 $GX323=JPR133.*TKT424;$   
 $GX333=GK333 + GK433.*JPR133 + GK533.*JPR233;$   
 $GX343=GK343 + GK443.*JPR133 + GK543.*JPR233;$   
 $GX353=GK353 + GK453.*JPR133 + GK553.*JPR233;$   
 $GX413=-(S3.*TKT514);$   
 $GX423=C3.*TKT424;$   
 $GX433=C3.*GK433 - GK533.*S3;$

GX443=C3.\*GK443 - GK543.\*S3;  
 GX453=C3.\*GK453 - GK553.\*S3;  
 GX513=C3.\*TKT514;  
 GX523=S3.\*TKT424;  
 GX533=C3.\*GK533 + GK433.\*S3;  
 GX543=C3.\*GK543 + GK443.\*S3;  
 GX553=C3.\*GK553 + GK453.\*S3;  
 TKT113=C3.\*GX113 - GX123.\*S3;  
 TKT213=C3.\*GX213 - GX223.\*S3;  
 TKT313=C3.\*GX313 - GX323.\*S3;  
 TKT413=C3.\*GX413 - GX423.\*S3;  
 TKT513=C3.\*GX513 - GX523.\*S3;  
 TKT613=C3.\*MY3R + MX3R.\*S3;  
 TKT223=C3.\*GX223 - d3.\*GX263 + GX213.\*S3;  
 TKT323=C3.\*GX323 + GX313.\*S3;  
 TKT423=C3.\*GX423 + GX413.\*S3;  
 TKT523=C3.\*GX523 + GX513.\*S3;  
 TKT623=-(d3.\*GK664) - C3.\*MX3R + MY3R.\*S3;  
 TKT333=GX333 + GX343.\*JPR133 + GX353.\*JPR233;  
 TKT433=GX433 + GX443.\*JPR133 + GX453.\*JPR233;  
 TKT533=GX533 + GX543.\*JPR133 + GX553.\*JPR233;  
 TKT443=C3.\*GX443 - GX453.\*S3;  
 TKT543=C3.\*GX543 - GX553.\*S3;  
 TKT553=C3.\*GX553 + GX543.\*S3;  
 MJE612=MY2 + TKT613;  
 MJE622=-MX2R + TKT623;  
 MJE332=TKT333 + ZZ2R;  
 MJE432=-MY2 + TKT433;  
 MJE532=MX2R + TKT533;  
 VBE12=-(AP13.\*C3) + AP23.\*S3;

```

VBE22=-(AP23.*C3) - AP13.*S3 - d3.*VBE63;
VBE32=-AP33 - AP43.*JPR133 - AP53.*JPR233;
VBE42=-(AP43.*C3) + AP53.*S3 - SW12;
VBE52=-(AP53.*C3) - AP43.*S3 - SW22;
JD2=1./(IA2 + MJE332);
JU12=JD2.*TKT313;
JU22=JD2.*TKT323;
JU32=JD2.*MJE332;
JU42=JD2.*MJE432;
JU52=JD2.*MJE532;
GW2=GAM2 - FV2.*QP2 + VBE32 - FS2.*sign(QP2);
GK112=TKT113 - JU12.*TKT313;
GK122=TKT213 - JU12.*TKT323;
GK132=-(JU12.*MJE332) + TKT313;
GK142=-(JU12.*MJE432) + TKT413;
GK152=-(JU12.*MJE532) + TKT513;
GK212=TKT213 - JU22.*TKT313;
GK222=TKT223 - JU22.*TKT323;
GK232=-(JU22.*MJE332) + TKT323;
GK242=-(JU22.*MJE432) + TKT423;
GK252=-(JU22.*MJE532) + TKT523;
GK312=TKT313 - JU32.*TKT313;
GK322=TKT323 - JU32.*TKT323;
GK332=MJE332 - JU32.*MJE332;
GK342=MJE432 - JU32.*MJE432;
GK352=MJE532 - JU32.*MJE532;
GK412=-(JU42.*TKT313) + TKT413;
GK422=-(JU42.*TKT323) + TKT423;
GK432=-(JU42.*MJE332) + MJE432;
GK442=-(JU42.*MJE432) + TKT443;

```

$GK452 = -(JU42.*MJE532) + TKT543;$   
 $GK512 = -(JU52.*TKT313) + TKT513;$   
 $GK522 = -(JU52.*TKT323) + TKT523;$   
 $GK532 = -(JU52.*MJE332) + MJE532;$   
 $GK542 = -(JU52.*MJE432) + TKT543;$   
 $GK552 = -(JU52.*MJE532) + TKT553;$   
 $NG12 = GK142.*LW12 + GK152.*LW22;$   
 $NG22 = GK242.*LW12 + GK252.*LW22;$   
 $NG32 = GK342.*LW12 + GK352.*LW22;$   
 $NG42 = GK442.*LW12 + GK452.*LW22;$   
 $NG52 = GK542.*LW12 + GK552.*LW22;$   
 $VS12 = GW2.*JU12 + NG12;$   
 $VS22 = GW2.*JU22 + NG22;$   
 $VS32 = GW2.*JU32 + NG32;$   
 $VS42 = GW2.*JU42 + NG42;$   
 $VS52 = GW2.*JU52 + NG52;$   
 $AP12 = -VBE12 + VS12;$   
 $AP22 = -VBE22 + VS22;$   
 $AP32 = -VBE32 + VS32;$   
 $AP42 = -VBE42 + VS42;$   
 $AP52 = -VBE52 + VS52;$   
 $GX112 = C2.*GK112 - GK212.*S2;$   
 $GX122 = C2.*GK122 - GK222.*S2;$   
 $GX132 = C2.*GK132 - GK232.*S2;$   
 $GX142 = C2.*GK142 - GK242.*S2;$   
 $GX152 = C2.*GK152 - GK252.*S2;$   
 $GX162 = C2.*MJE612 - MJE622.*S2;$   
 $GX212 = C2.*GK212 - d2.*MJE612 + GK112.*S2;$   
 $GX222 = C2.*GK222 - d2.*MJE622 + GK122.*S2;$   
 $GX232 = C2.*GK232 + GK132.*S2;$

```

GX242=C2.*GK242 + GK142.*S2;
GX252=C2.*GK252 + GK152.*S2;
GX262=-(d2.*GK664) + C2.*MJE622 + MJE612.*S2;
GX312=GK312 + GK412.*JPR132 + GK512.*JPR232;
GX322=GK322 + GK422.*JPR132 + GK522.*JPR232;
GX332=GK332 + GK432.*JPR132 + GK532.*JPR232;
GX342=GK342 + GK442.*JPR132 + GK542.*JPR232;
GX352=GK352 + GK452.*JPR132 + GK552.*JPR232;
GX412=C2.*GK412 - GK512.*S2;
GX422=C2.*GK422 - GK522.*S2;
GX432=C2.*GK432 - GK532.*S2;
GX442=C2.*GK442 - GK542.*S2;
GX452=C2.*GK452 - GK552.*S2;
GX512=C2.*GK512 + GK412.*S2;
GX522=C2.*GK522 + GK422.*S2;
GX532=C2.*GK532 + GK432.*S2;
GX542=C2.*GK542 + GK442.*S2;
GX552=C2.*GK552 + GK452.*S2;
TKT112=C2.*GX112 - GX122.*S2;
TKT212=C2.*GX212 - GX222.*S2;
TKT312=C2.*GX312 - GX322.*S2;
TKT412=C2.*GX412 - GX422.*S2;
TKT512=C2.*GX512 - GX522.*S2;
TKT612=C2.*MJE612 - MJE622.*S2;
TKT222=C2.*GX222 - d2.*GX262 + GX212.*S2;
TKT322=C2.*GX322 + GX312.*S2;
TKT422=C2.*GX422 + GX412.*S2;
TKT522=C2.*GX522 + GX512.*S2;
TKT622=-(d2.*GK664) + C2.*MJE622 + MJE612.*S2;
TKT332=GX332 + GX342.*JPR132 + GX352.*JPR232;

```

```

TKT432=GX432 + GX442.*JPR132 + GX452.*JPR232;
TKT532=GX532 + GX542.*JPR132 + GX552.*JPR232;
TKT442=C2.*GX442 - GX452.*S2;
TKT542=C2.*GX542 - GX552.*S2;
TKT552=C2.*GX552 + GX542.*S2;
MJE331=TKT332 + ZZ1R;
VBE11=-(AP12.*C2) + AP22.*S2;
VBE21=-(AP22.*C2) - AP12.*S2 - d2.*VBE63;
VBE31=-AP32 - AP42.*JPR132 - AP52.*JPR232;
VBE41=-(AP42.*C2) + AP52.*S2;
VBE51=-(AP52.*C2) - AP42.*S2;
JD1=1./MJE331;
JU11=JD1.*TKT312;
JU21=JD1.*TKT322;
JU31=JD1.*MJE331;
JU41=JD1.*TKT432;
JU51=JD1.*TKT532;
GW1=GAM1 - FV1.*QP1 + VBE31 - FS1.*sign(QP1);
QDP1=GW1.*JD1;
VR42=LW12 + JPR132.*QDP1;
VR52=LW22 + JPR232.*QDP1;
GU2=JU32.*QDP1 + JU42.*VR42 + JU52.*VR52;
QDP2=-GU2 + GW2.*JD2;
WP32=QDP1 + QDP2;
VR43=LW13 + C3.*VR42 + S3.*VR52 + JPR133.*WP32;
VR53=LW23 - S3.*VR42 + C3.*VR52 + JPR233.*WP32;
GU3=JU43.*VR43 + JU53.*VR53 + JU33.*WP32;
QDP3=-GU3 + GW3.*JD3;
WP33=QDP3 + WP32;
GU4=-(G3.*JU64);

```

```

QDP4=-GU4 + GW4.*JD4;

%% Los 8 estados derivados
sys(1) = x(5) ;

sys(2) = x(6) ;

sys(3) = x(7) ;

sys(4) = x(8) ;

sys(5) = QDP1;

sys(6) = QDP2;

sys(7) = QDP3;

sys(8) = QDP4;

%% Función de finalización de las salidas del modelo dinámico

% Regresa las salidas

function sys=mdlOutputs(t,x,u)

sys(1) = x(1);
sys(2) = x(2);
sys(3) = x(3);

```

```
sys(4) = x(4);  
sys(5) = x(5);  
sys(6) = x(6);  
sys(7) = x(7);  
sys(8) = x(8);
```

## ANEXO 2

Código en Matlab de las consignas y trayectorias de prueba para los Robots tipo serie SCARA y cilíndrico.

· Trayectoria lineal con cambio de dirección (lineal.m)

```
%% Trayectoria lineal con cambio de dirección

% Tiempo de muestreo y duración final de trayectoria

Tem = 0.001;
Tfinal = 3;

% Calcular el número de muestras

Nmuestras = (Tfinal/Tem)+1;

if ((round(Nmuestras)-Nmuestras) == 0)

    instant = [0:Tem:Tfinal]';

else

    Nmuestras = Nmuestras+1;
    instant = [0:Tem:Tfinal+Tem]';

end
```

```
%Definir la base de tiempo
```

```
instant = instant(1:3000,:);
```

```
% Definición de las dos líneas:
```

```
t = 0;
```

```
for h = 1:1:1500
```

```
    t = t+Tem;
```

```
    x1(h)=t;
```

```
    y1(h)=t;
```

```
end
```

```
t = 1.5;
```

```
for h = 1:1:1500
```

```
    t = t+Tem;
```

```
    x2(h)=-t+3;
```

```
    y2(h)=t;
```

```
end
```

```
xx = [x1 x2];
```

```
yy = [y1 y2];
```

```
xx = xx';
```

```
yy = yy';
```

```
cons1 = 0.1 + 0.5*xx;
```

```
cons2 = 0.1 + 0.5*yy;
```

```
cons3 = zeros(3000,1);
```

```

qd_1 = cons1;

cons4 = zeros(3000,1);

qd_2 = cons2;
qd_3 = cons3;
qd_4 = cons4;

```

· Trayectoria circular 1 (circular.m)

```

%% Trayectoria circular articulación 1

% Tiempo de muestreo y duración final de la trayectoria:

Tfinal=3.0;% Tiempo en que tarda el robot en realizar la trayectoria
Tem=0.001;% TIEMPO DE MUESTREO

% Cálculo del número de muestras:

Nmuestras =(Tfinal/Tem)+1;
if ((round(Nmuestras)-Nmuestras) == 0)
    instant=[0:Tem:Tfinal]';
else
    Nmuestras = Nmuestras+1;
    instant=[0:Tem:Tfinal+Tem]';
end
t=0;

for h=1:1:Nmuestras

```

```

t=t+Tem;
    x1(h)=0.4*sin(2*pi*(1/Tfinal)*t-3*pi/5);
    y1(h)=0.4*cos(2*pi*1/(Tfinal)*t);
end
x1=x1';
y1=y1';

%Consigna articular:

cons1= 0.04 + x1;
cons2= 0.04 + y1;
cons3=ones(3001,1);

% qd_1 = cons1;
cons4 = -0.4*ones(3001,1);
% qd_2=cons2;
% qd_3=cons3;
% qd_4=cons4;

```

· Trayectoria circular 2 (circular2.m)

```

%---Movimiento elíptico-----
%-----

% Tiempo de muestreo y duración final de la trayectoria:

Tfinal=3.0;
Tem=0.001;

```

```

% Cálculo del número de muestras:

nbech=(Tfinal/Tem)+1;
if ((round(nbech)-nbech) == 0)
    instant=[0:Tem:Tfinal]';
else
    nbech=nbech+1;
    instant=[0:Tem:Tfinal+Tem]';
end
t=0;

for h=1:1:nbech
    t=t+Tem;
    x1(h)=0.4*sin(2*pi*(1/Tfinal)*t-3*pi/5);
    y1(h)=0.4*cos(2*pi*1/(Tfinal)*t);
end
x1=x1';
y1=y1';
%-----
%Consigna articular:

cons1= 0.4 + x1;
cons2= 0.4 + y1;
cons3=ones(3001,1);

%%
% qd_1 = cons1;
cons4 = -0.4*ones(3001,1);
% qd_2=cons2;

```

```
% qd_3=cons3;
% qd_4=cons4;
```

· Trayectoria circular 3 (circular3.m)

```
%----Movimiento circular3-----
%-----

% Tiempo de muestreo y duración final de la trayectoria:

Tfinal=3.0;
Tem=0.001;

% Cálculo del número de muestras:

nbech=(Tfinal/Tem)+1;
if ((round(nbech)-nbech) == 0)
    instant=[0:Tem:Tfinal]';
else
    nbech=nbech+1;
    instant=[0:Tem:Tfinal+Tem]';
end
t=0;

for h=1:1:nbech
    t=t+Tem;
    x1(h)=0.04*sin(2*pi*(1/Tfinal)*t-5*pi/5);
    y1(h)=0.04*cos(2*pi*1/(Tfinal)*t);
end
```

```

x1=x1';
y1=y1';
%-----
%Consigna articular:

cons1= 0.5 + x1;
cons2= 0.5 + y1;
cons3=ones(3001,1);

%%
% qd_1 = cons1;
cons4 = -0.4*ones(3001,1);
% qd_2=cons2;
% qd_3=cons3;
% qd_4=cons4;

```

- Generación de una consigna tipo polinomio de quinto grado (grado\_cinco.m)

```

%-----
% Generación de una consigna tipo polinomio de quinto grado:
%-----

% Consigna Eje n:

Tem=0.001; % TIEMPO DE MUESTREO

% Posiciones inicial y final:
Qiniti = 0.0;
Qfini = 1.0;

```

```
Tfini=1.0; % TIEMPO FINAL

% Cálculo de la distancia a recorrer:

delta_pos=Qfini-Qiniti;

% Puntos de quiebre:

t1=0;
t2=Tfini;
t3=2*Tfini;

% Cálculo del número de muestras:

Nmuestras=1000;
instant=[0.001:Tem:1]'; %VECTOR QUE TIENE 0.001 , 0.002 ....

xt=0;
temps=0;
p=[];

% Construcción de los vectores para la simulación:

for g=1:1:Nmuestras

    p(g)=xt;
```

```

if (temps<=t2)
    ti=t1;
    a0=Qfini*(10*(temps/Tfini)^3 - 15*(temps/Tfini)^4 + 6*(temps/Tfini)^5);
elseif (temps<=t3)
    ti=t2;
    a0=Qfini;
end

xt=a0;
temps=temps+Tem;
end

qd_1 = p';

%Consigna articular: (SEGÚN LOS GRADOS DE LIBERTAD SE COLOCAN LAS cons)

cons1 = qd_1;
cons2 = 1.3*qd_1;
cons3 = 1.5*qd_1;
cons4 = 0.8*qd_1;

qd_2 = cons2;
qd_3 = cons3;
qd_4 = cons4;

```



Semillero de Mecatrónica

El desarrollo de la presente guía práctica para el proceso de aprendizaje complementario de la asignatura de Robótica aborda los conceptos vistos en la primera guía de Ruiz y Burbano (2019) sobre el modelado geométrico y cinemático de robots industriales tipo serie, con el objetivo de modelar dinámicamente los ejemplos de estudio iniciales y realizar pruebas de control para el seguimiento de trayectorias de tipo articular y cartesianas. Lo anterior, haciendo uso de la integración de recursos de información y comunicación, en relación con procesos de mediación pedagógica y tecnológica. En este sentido se obtiene una estructura del recurso didáctico construida de la siguiente manera: 1) Elementos teóricos, estos deben brindar la información necesaria para iniciar la construcción del modelo dinámico de robots industriales. 2) Unir la experiencia práctica (construir la función de transferencia de un robot industrial de tipo serial para realizar simulaciones y probar diferentes tipos de control como el proporcional, integral y derivativo [pid] y el control por par calculado [ctc], en el software computacional Matlab®-Simulink) que permita validar los conceptos teóricos de la robótica 3) La evaluación, determinada en procesos sincrónicos como ejercicios en clase y asincrónicos como talleres y simulaciones en Matlab, evidenciando los procesos de retroalimentación en el aprendizaje del tema de Robótica. 4) Componentes de trabajo colaborativo, como el tema de la dinámica de robots.

