EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES USANDO SYMBOLAB Y GEOGEBRA

COLECCIÓN MATERIAL DOCENTE INGENIERÍAS

Corporación Universitaria Comfacauca
Unicomfacauca
VIGILADA MINEDUCACIÓN

Sello Editorial
Unicomfacauca
VIGILADA MINEDUCACIÓN

Mauricio Andrés Mosquera Ríos.
Director del Departamento
de Ciencias Básicas de
Unicomfacauca en Popayán.
Ingeniero en Electrónica
y Telecomunicaciones de
la Universidad del Cauca y
Magister en Elearning de
la Universidad Autónoma
de Bucaramanga.

EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES USANDO SYMBOLAB Y GEOGEBRA

Mauricio Andrés Mosquera Ríos

Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia
Mosquera Ríos, Mauricio Andrés.
Ejercicios resueltos de matemáticas fundamentales usando Symbolab
y Geogebra / Mauricio Andrés Mosquera Ríos.
----1ª ed.--- Popayán: Sello editorial Unicomfacauca,2022.
p. 98
Contiene datos de los autores.

ISBN (Digital): 978-958-53187-6-2

Primera edición en español
Sello Editorial Unicomfacauca, septiembre de 2022
ISBN Digital: 978-958-53187-6-2

Diseño Editorial: Sello Editorial Unicomfacauca – Corporación
Universitaria Comfacauca - Unicomfacauca
Corrección de Estilo: La Peregrina Estudio – larailustracion@gmail.com
Diagramación: La Peregrina Estudio – larailustracion@gmail.com
Editor General de Publicaciones: Julio Eduardo Mejía Manzano

Sello Editorial Unicomfacauca
Calle 4ta # 8-30 Centro Histórico
Popayán, Colombia
Teléfono: 602 8386000 Ext. 118
www.unicomfacauca.edu.co /investigacion/sello-editorial/

Contenido

RESUMEN

La presente obra escrita está dirigida a estudiantes de primer semestre que entran a cursar la asignatura de Matemáticas Fundamentales. En este documento se describe la forma de solucionar ejercicios orientados fundamentalmente a la resolución de problemas, haciendo uso de los software matemáticos Geogebra y Symbolab. Con este material se pretende que el estudiante conozca y apropie estas herramientas para que complemente su formación en el tiempo de trabajo independiente (extra clase) y se ejercite al comprobar algebraica y gráficamente los ejercicios de Matemáticas fundamentales, una asignatura base en el proceso de formación académica de los futuros profesionales.

Palabras clave: software, matemáticas, resolución de problemas.

INTRODUCCIÓN

Con el desarrollo del presente material de apoyo docente, se pretende aportar a las clases de Matemáticas fundamentales que se imparten en la Corporación Universitaria Comfacauca en los diferentes programas académicos. Esto a través de recursos tecnológicos que se encuentran disponibles en la web, específicamente los software matemáticos Geogebra y Symbolab.

El propósito y alcance de este material es ejemplificar ejercicios de Matemáticas Fundamentales resueltos con estos software y con orientación a la metodología ABP en la que hay un enfoque a la resolución de problemas, con la pretensión de que en adelante el estudiante apropie estas herramientas en su formación complementaria a las clases presenciales, en los tiempos de trabajo independiente. Es importante considerar esta estrategia en la asignatura de Matemáticas Fundamentales, una asignatura transversal de primer semestre de casi todos los programas académicos de la Corporación Universitaria Comfacauca, para combatir la problemática manifiesta en muchos estudiantes que ingresan a la universidad con falencias y vacíos de conocimientos en las bases de matemáticas del colegio.

En muchos textos académicos de matemáticas fundamentales, se desarrollan los objetivos de aprendizaje de las diferentes temáticas, pero estos no están apoyados en herramientas tecnológicas que les permiten a los estudiantes comprobar y validar lo aprendido en el aula. Estas herramientas están al alcance de todos mediante dispositivos móviles como computadores portátiles, tablets o teléfonos celulares. Ambos recursos les permiten a los estudiantes corroborar los cálculos matemáticos relacionados con la solución de ecuaciones e inecuaciones, y también con el cálculo de mediciones geométricas como áreas, longitudes, perímetros, etc.

La mayoría de los ejercicios desarrollados aquí se enfocan a la resolución de problemas relacionados con las características de los programas académicos a los que están dirigidos: programas de ingenierías, ciencias contables y administrativas. Los profesionales de hoy requieren enfáticamente que la matemática en la que se forman sea contextualizada a situaciones de la vida real, pues así le encuentran un sentido y una relevancia. Cuando los estudiantes encuentran importante para sus vidas un objeto de conocimiento, es cuando se despierta en ellos la motivación por aprender aún más. Se plantean interrogantes, y con ello alternativas de solución diversas, volviéndose propositivos y además creativos.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En el presente apartado se tratarán dos elementos teóricos conceptuales en los cuales se basa el desarrollo del presente material de apoyo docente: aprendizaje basado en problemas (APB) y software matemático.

Aprendizaje basado en problemas

El ABP es una metodología que le permite a los estudiantes, adquirir y construir su propio conocimiento (teoría constructivista) a partir del desarrollo y resolución de situaciones contextualizadas en el día a día, mediante procesos cognitivos y reflexivos que le exijan descubrir alternativas e investigar en torno a un problema. Esta metodología comenta en el estudiante indagar, consultar información, gestionarla y definir recursos que considere relevantes para la propuesta de soluciones. Así, también sirve para formar a los estudiantes en procesos de toma de decisiones, ya que alternativas de solución seguramente hay varias, pero se debe empezar a sopesar cuál de ellas es la más efectiva.

El APB se estructura en fases: la primera de ellas es el planteamiento y presentación del problema a resolver, esto es responsabilidad del docente y se debe estructurar según los objetivos de aprendizaje que pretende lograr en los estudiantes. A continuación, la segunda fase está a cargo del estudiante que debe interpretar adecuadamente la situación identificando las necesidades a resolver. Después, está la búsqueda de la información que es relevante dentro del contexto del problema y de los recursos que serán útiles y, la fase final que hace referencia a la propuesta de solución que tiene el estudiante. Durante todo el proceso, el profesor es un orientador o guía, y el estudiante es el responsable directo de su propio proceso de aprendizaje.

Por otra parte, en el campo de las matemáticas, es importante considerar algunas de las competencias específicas de esta área de conocimiento, la primera de ellas guarda estrecha relación con esta metodología, y se privilegia en el presente texto.

La resolución de problemas, que hace referencia a la capacidad del estudiante de identificar y “definir los elementos significativos que constituyen un problema para resolverlo con criterio y de manera efectiva” (Orozco y Caballero, 2014, p. 83). La competencia geométrica, con la que se refiere a la capacidad de un estudiante de construir modelos de representaciones bidimensionales y tridimensionales.

Un estudio tipo encuesta con una muestra de 1007 estudiantes del grado en Pedagogía en la Universidad de Sevilla (España) que busca identificar las competencias adquiridas por estudiantes universitarios en relación con el ABP, al igual que el grado de impacto del uso de esta metodología, muestra que facilita el aprendizaje cooperativo, los estudiantes aprenden más que con una metodología expositiva, fomenta el desarrollo del aprendizaje autónomo y desarrolla capacidad creativa (Gil, 2018). La autora, a través de los resultados obtenidos en este estudio, concluye que hay una actitud positiva respecto al uso del ABP como metodología de enseñanza-aprendizaje, e invita a hacer un mayor uso de ella dentro de las asignaturas, resaltando que además potencia y fortalece la autonomía del estudiante, la toma de decisiones y las habilidades comunicativas.

En la carrera en Ingeniería Agronómica de la Universidad de Guantánamo, Cuba se desarrolló un estudio exploratorio y comparativo de la aplicación de dos formas de estructurar el contenido matemático: “la sistematización formal propia de la exposición de los conocimientos y una organización mediante problemas. Se realizó una experiencia con la totalidad de los estudiantes matriculados en los dos grupos del primer año de la carrera” (Guerrero, 2004, p. 2). La asignatura seleccionada fue Matemática II. El experimento tuvo dos instancias: primero, la temática tratada fue funciones reales y trazado de curvas mediante problemas. En el segundo instante, se trataron las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden, con coeficientes constantes, homogéneas y no homogéneas. Ese momento se hizo por exposición formal de contenidos. Los resultados obtenidos indicaron que la estructuración por problemas, tiene mayores efectos en la eficiencia de los conocimientos logrados por los estudiantes, que la estructura planteada por medio de la forma expositiva, usada regularmente en matemáticas (Guerrero, 2004). La estructuración de la formación por problemas favorece la actuación del futuro profesional en la solución de aspectos cuantitativos de las situaciones problemáticas de la vida real.

En Costa Rica, el preocupante bajo rendimiento en matemáticas por parte de los estudiantes ha sido un factor de repitencia y deserción. La resolución de problemas es considerada una de las áreas que mayor dificultad ofrece a la población estudiantil y que inquietan al Sistema Educativo de ese país. Los estudiantes pueden resolver mecánicamente las operaciones básicas pero se presentan inconvenientes cuando se trata de aplicarlas a la solución de un problema (Calvo, 2008).

El estudio realizado en la Universidad de Costa Rica manifiesta la importancia de tener claro que las matemáticas no se aprenden por la simple transmisión de conocimientos del docente o de la información encontrada en los libros. Se aprende mejor con procesos de interacción con situaciones problemáticas en las que el estudiante se ve obligado a modificar su estructura cognitiva a través de la realización de diferentes acciones que fomentan habilidades diversas, como son: la clasificación, importante en la construcción de conceptos matemáticos. La flexibilidad de pensamiento, que implica la posibilidad de resolver un mismo problema de diferentes formas. La estimación, que permite dar una aproximación a la solución del problema tratado. La imaginación espacial, que permite que los estudiantes puedan ubicar los objetos en el plano y en el espacio. Y finalmente, la reversibilidad de pensamiento con la que los estudiantes pueden plantear problemas a partir de resultados.

En el trabajo académico: *La resolución de problemas matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales* (Santos, 2016), se plantea la pregunta: “¿Qué cambios en el currículum matemático se deben considerar cuando los estudiantes utilizan sistemáticamente diferentes tecnologías digitales?” (p. 333). Para responderla se afirma que se deben problematizar los contenidos para organizar y estructurar el conocimiento. Para ello, los estudiantes deben desarrollar una cultura digital, necesaria no sólo para la identificación de problemas disciplinarios, sino también para la búsqueda de información, exploración, solución de problemas y comunicación de resultados. Se adquiere así una competencia digital por parte de los estudiantes. Los estudiantes deben conceptualizar su aprendizaje en términos de preguntas que ellos mismos formulen, explorar y proponer soluciones a través de tecnologías digitales. En esta investigación, se invita además a los estudiantes a trabajar en equipo para el intercambio de ideas, todo a través con un espíritu de comunicación y colaboración mutua en un marco de principios éticos.

Por otra parte, al considerar la otra cara de la moneda, hay desarrollos investigativos que no solo se centran en la resolución de problemas matemáticos, sino también en la invención de los mismos fomentando la creatividad (Ayllón *et al*., 2015). Cuando a un estudiante se le invita a inventar un problema, este se ve exigido a pensar, analizar y examinar datos. La invención de problemas fomenta el aprendizaje significativo, pues recurre a las capacidades y conocimientos matemáticos previos que se tienen. Los educadores están comprometidos con desarrollar la creatividad en los estudiantes a través de ambientes propicios para el aprendizaje creativo, estrechando un vínculo entre educación matemática y creatividad.

Otro estudio investigativo ha tratado la resolución de problemas matemáticos haciendo uso de la construcción de mapas conceptuales. En él se analiza la práctica de resolución de un conjunto de problemas de cálculo diferencial por parte de un profesor de ingeniería (Moreno, 2017). El proceso para la obtención de los datos del profesor investigado se hizo a través de una tableta electrónica que permite la captura de audio y trazo de escritura que es almacenado en un archivo digital. Con ello se logra obtener el discurso explicativo del profesor durante la resolución de dos problemas denominados: el problema del globo y el problema de la caja de madera. “Los diferentes objetos matemáticos involucrados en la resolución del problema, obtenidos a partir de la producción oral y escrita del docente, son representados gráficamente mediante mapas conceptuales” (p. 60). Con la interpretación del mapa conceptual se logra la descripción gráfica de la resolución de problemas, y se logra además evidenciar la realización de procesos como idealización, visualización, argumentación y tratamiento matemático entre otros.

En el artículo, “La resolución de problemas matemáticos y su impacto en pensamiento crítico del ciudadano” (Monroy, 2014) se plantea y expone una reflexión sobre la incidencia que tiene la formación en resolución de problemas matemáticos en el desarrollo integral de las personas. Se trabajan tres interrogantes: ¿qué son las matemáticas?, ¿qué es un problema? y ¿cómo se relaciona esta forma de pensar con el desarrollo de la persona? Y de forma general, se plantean una serie de pasos a considerar en la resolución de un problema: compresión de la situación, concepción de un plan de solución, ejecución del plan, retrospectiva y solución. El resolver problemas habilita a la mente de los estudiantes para enfrentarse a grandes retos de la vida cotidiana y desarrolla la capacidad de tomar decisiones.

En la Universidad Santo Tomás se desarrolló una estrategia de resolución de problemas de física, química y matemáticas, con los estudiantes de ingeniería (García, 2010). Para ello se implementó una metodología basada en el diseño y aplicación de talleres en cada área durante diferentes sesiones de trabajo. La información fue recogida a través de entrevistas, encuestas y videos. En un principio se observó que algunos estudiantes presentaban problemas de comprensión de lectura, manejo incorrecto de unidades, problemas para despejar ecuaciones con lo que se recurrió a la lectura e interpretación de los enunciados de los problemas de forma colectiva, también a la realización de esquemas y gráficos para esclarecer las situaciones. Como conclusión de la investigación, se definieron unas pautas para la elaboración de talleres bajo la resolución de problemas: que sean de lenguaje sencillo, que fomenten el pensamiento analítico, que inviten a los estudiantes a dividir los problemas en fases, que tengan grados de dificultad, que fomenten el trabajo cooperativo, y motiven la proposición de soluciones diferentes.

Un estudio (Mallartz, 2014) realizado sobre una muestra de 104 estudiantes de matemáticas aspirantes para ingresar a programas de matemáticas, físicas e ingenierías, en Universidades de Barcelona (España), se centró en la detección de dificultades que presentan los preuniversitarios en cuanto a la resolución de problemas y poder incidir así en tales dificultades. Se analizaron las resoluciones mecánicas, la ejecución de las operaciones, la aplicación de las leyes y la capacidad creativa de resolución. En la prueba se le solicita al estudiante qué quiere hacer y por qué, el estudiante debe argumentar su respuesta. Son preguntas que invitan a pensar y reflexionar, no rutinarias. Se concluye en el estudio que los estudiantes son incapaces de resolver con creatividad situaciones de geometría, les falta precisión en los cálculos realizados, tienen fallas en operaciones de algebra matricial y en cambio sí asimilan bien los procedimientos puramente mecánicos

Software matemático

Es un tipo de recurso educativo que le permite al docente y al estudiante mediante la visualización y la interactividad, dinamizar y potencializar los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula apoyados en representaciones gráficas de los mismos, junto con desarrollos de procedimientos que ofrecen mayor claridad en los cálculos y apoyan la metodología de la clase.

Hay varios tipos de software para matemáticas, dependiendo del tipo de análisis (gráfico o numérico) y el enfoque de aplicación que tenga:

- El software de análisis geométrico y gráfico
- Las aplicaciones móviles que desarrollan ecuaciones y fórmulas
- El software de análisis numérico que permite simulación de procesos del mundo real.
- El software para solución de problemas estadísticos.

Con el desarrollo tecnológico actual, específicamente en lo referente a dispositivos móviles, con una alta capacidad de procesamiento de información, los jóvenes estudiantes cuentan en sus manos con la posibilidad de llevar herramientas poderosas software para el aprendizaje. Es así como con el aprendizaje móvil (M-learning), se fomenta el aprender en cualquier lugar y en cualquier momento con la posibilidad de conectarse con otros dispositivos para intercambiar información y fomentar un aprendizaje colaborativo (Morales, 2014).

Experiencias como la del Instituto Politécnico Nacional ESCOM en México, en el que se planteó un problema a los estudiantes de ingeniería que involucrara el tema de función matemática, para que ellos la solucionaran a partir de la construcción de conceptos y el uso de una aplicación móvil diseñada específicamente para tal fin, da cuenta del positivo impacto en el proceso de enseñanza- aprendizaje que ofrecen estas tecnologías. Como resultado de esta investigación se destacó la usabilidad que tienen los dispositivos móviles y se concluyó que la aplicación les permitió desarrollar diferentes habilidades comunicativas y reflexivas que contribuyeron a un aprendizaje significativo (Ruiz *et al*., 2015).

Otro antecedente de desarrollo y uso de software con aplicaciones móviles se encuentra en Argentina, donde profesores del Departamento de Matemática de Facultad de Ciencias Exactas y Naturales en la Universidad Nacional de La Pampa estudian algunas aplicaciones móviles gratuitas que se encuentran en la tienda de Google Play para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Luego desarrollaron aplicaciones propietarias, aprovechándose de que tanto docentes como estudiantes usan en su vida cotidiana un equipo móvil (Ascheri *et al*., 2015).

Un trabajo realizado en el Instituto Tecnológico de Celaya y en el Instituto Tecnológico de Roque haciendo uso del software Geogebra para determinar su impacto en la enseñanza del cálculo diferencial como estrategia para disminución de la tasa de reprobación de dicha asignatura, muestra que los estudiantes de la carrera de Mecatrónica tuvieron los puntajes más altos en una prueba diagnóstica, que en uno de los grupos de la carrera de Sistemas donde no se aplicó la herramienta. Se encontró también una correlación entre los puntajes obtenidos por los estudiantes en los instrumentos y en la calificación final (Oliver *et al*., 2017). Los estudiantes que se sometieron al estudio manifestaron al final del proceso, que fue muy enriquecedora la experiencia de uso del Geogebra, favoreciendo el aprendizaje de conceptos de difícil comprensión por su alto grado de abstracción. Igualmente, los profesores que usaron la herramienta manifestaron también que se logra una mejor comprensión de los conceptos vistos en el aula.

Por otra parte, una investigación realizada con estudiantes de Ingeniería Civil, de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado (UCLA) tuvo como propósito el "desarrollo de habilidades del pensamiento y el mejoramiento del aprendizaje en alumnos y alumnas de la asignatura Matemática II mediante el empleo de estrategias instruccionales basadas en el uso del software matemático" (Ávila *et al*., 2008, p. 3). Específicamente, "se investigó sobre cómo innovar el proceso de aprendizaje en el tema de la integral definida incorporando el software Maple al trabajo intelectual del discente con el objeto de mejorar la comprensión y el aprendizaje de la matemática" (p. 2). El uso del software les permitió a los estudiantes desarrollar ensayos y experimentos, creando un ambiente reflexivo y de aplicación de conocimientos previos. Se promovió así una serie de clases dinámicas, participativas y centradas en el estudiante. Finalmente, se concluye con la investigación, que los conocimientos en los estudiantes en torno al tema de estudio, mejoraron.

En el trabajo investigativo denominado "Desarrollo de competencias para usar diversas aplicaciones de software para la resolución de problemas en los cursos de matemáticas" (Ávila y Ávila, 2017) se plantea la importancia de hacer uso hoy día del computador como herramienta fundamental en el proceso enseñanza aprendizaje. Pues le permite a los estudiantes una rápida generalización en la resolución de problemas complejos, y enriquece su propio significado de los objetos matemáticos estudiados. Les permite a los estudiantes alcanzar la competencia en resolución de problemas por medio del uso de algoritmos, modelaciones y simulaciones.

Laura del Río y Néstor Bucarí (2016) tienen un artículo en el que hacen una revisión bibliográfica de los trabajos desarrollados entre los años 2009 y 2016 que tratan sobre el uso de materiales hipermedias que potencien el aprendizaje de las matemáticas. Estos materiales son analizados desde tres puntos de vista: tipos de materiales, metodología utilizadas y los marcos teóricos que los soportan. Entre los recursos hipermediales se encuentran los que favorecen la visualización gráfica de los conceptos y la exploración dinámica, como por ejemplo los Applets y las animaciones. Además, están los simuladores, con los que los estudiantes, a través de la elaboración de modelos matemáticos, emulan un sistema de la realidad cotidiana. Otros autores hacen uso de videos en los que se dan las clases teóricas y se dejan los espacios de tiempo presencial para atender dudas y resolver problemas.

En el artículo, *Wolfram|Alpha, una herramienta informática con múltiples aplicaciones en la educación universitaria* (Gonzáles *et al*., 2018), se expone esta herramienta informática que permite resolver, consultar y analizar problemas de diferentes disciplinas del conocimiento como la química, las matemáticas, la medicina, etc., con el único requerimiento que es poder acceder a internet desde un dispositivo móvil. Funciona mediante algoritmos que permiten responder preguntas automáticamente, además de generar informes. Es un buscador libre y gratuito de respuestas desarrollado por la compañía Wolfram Research que opera en diferentes plataformas como Windows, Mac y Android. Hace una búsqueda semántica "para responder a las preguntas directamente, mediante el procesamiento de la respuesta extraída de una base de datos estructurados" (p. 315).

También se presenta la opción perfectamente viable de utilizar herramientas de software libre, orientadas muchas de ellas a resolver problemas de ciencias e ingeniería, que tienen como paradigma la innovación, bajo el principio de evolución continua. Además, el software libre es de bajo o nulo costo, puede ser copiado y compartido, y mantiene la compatibilidad con versiones anteriores (Herrera, 2013). Existen en muchas universidades cátedras de ciencias como física y matemáticas que hacen uso de cálculo simbólico, calculo numérico, simulación de sistemas, procesamiento de datos, etc., y para ellas hay herramientas computacionales tales como Scilab, Octave, Python corriendo en plataformas computacionales como Ubuntu–Linux, que debido a su nivel de accesibilidad y costo, representan buenas opciones a considerar al momento de trabajar en las asignaturas que así lo requieran. Siguiendo a Herrera, "Scilab disponible en www.scilab.org, es un software que utiliza lenguaje de programación de alto nivel, usado para la solución de problemas de algebra lineal, matrices dispersas, polinomios, funciones, solución de ecuaciones diferenciales, optimización, estadística y cálculo simbólico básico" (p. 3). Octave es otra herramienta de software libre cuyo funcionamiento y manejo es similar a Matlab y sirve para para realizar cálculo y análisis numérico.

En el presente material de apoyo docente se trabajará en torno a dos software matemáticos muy reconocidos en el ámbito académico, que están desarrollados tanto como aplicaciones en la web, como móviles: Geogebra (https://www.geogebra.org/) y Symbolab (https://es.symbolab.com/).

Geogebra es un software matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo, por lo que puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas (Vásconez y Varguillas, 2020, p. 52).

Symbolab, por su parte, es el software más completo de la educación de matemáticas. Proporciona soluciones paso a paso a cualquier problema, la práctica interactiva con notas, cuestionarios y estadísticas, graphing calculator, cheatsheets, ejemplos, videos y más. Symbolab es fácil y divertido de utilizar. Es una calculadora simbólica que abarca todas las áreas básicas de las matemáticas (álgebra, geometría y trigonometría, funciones y gráficas, cálculo infinitesimal). Symbolab tiene distribuidas sus funcionalidades en 8 áreas matemáticas: Pre algebra, Algebra, Pre cálculo, Cálculo, Trigonometría, Funciones y gráficas, Matrices y vectores, Geometría analítica (Symbolab, s.f.).

FUNDAMENTACIÓN METODOLÓGICA

El desarrollo del presente material de apoyo docente ha surgido a partir de la identificación de una situación problema: la dificultad de aprendizaje que tienen algunos estudiantes de programas de pregrado cuando inician su proceso de formación en Ciencias Básicas en las universidades, específicamente en la asignatura de Matemáticas fundamentales.

En la clase presencial tradicional, el profesor enseña los principios que rigen la matemática fundamental, partiendo del planteamiento y la solución de ecuaciones e inecuaciones hasta la resolución de problemas de geometría básica. El propósito final y más importante del curso es que el estudiante sepa interpretar situaciones de la vida real y resolverlas mediante matemáticas básicas.

En este sentido, como estrategia complementaria a la formación presencial en el aula se propone el uso de herramientas software para el aprendizaje en un curso de Matemáticas fundamentales. Para ello se presentan una serie de problemas que deben ser resueltos haciendo uso de los software Symbolab y Geogebra.

Con estas herramientas, el estudiante puede corroborar, contrastar y comparar los procedimientos algebraicos de solución realizados en la clase, con las soluciones algebraicas procedimentales y gráficas que estas ofrecen. A través de una interfaz amigable, vinculan al estudiante con los cálculos y le permiten, mediante el uso su dispositivo portátil, explorar las representaciones de los conceptos y buscar estrategias para resolver problemas.

Las fases de desarrollo metodológico de la propuesta son:

Fase 1. Identificación de la situación problema: dificultades de aprendizaje en Matemáticas Fundamentales.

Fase 2. Propuesta de solución a través de recursos TIC: uso de los software matemáticos Symbolab y Geogebra

Fase 3. Escogencia de problemas matemáticos por parte del profesor de la asignatura que directamente se enfoquen en el desarrollo de las competencias específicas y los objetivos. En el presente material, los ejercicios fueron tomados de los libros *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (Steward *et al*., 2012), *Álgebra y trigonometría* (Zill y Deward, 2000), *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (Swokowski y Cole, 2011).

Dentro de esta fase es importante presentar los objetivos de aprendizaje del curso de Matemáticas Fundamentales que se orienta en la Corporación Universitaria Comfacauca. El objetivo general es desarrollar en el estudiante competencias que le permitan interpretar, expresar y describir conceptos básicos de las matemáticas, de tal forma que promueva su capacidad de solucionar problemas o fenómenos reales aplicados en su campo profesional.

Como objetivos específicos se plantea:

· Desarrollar un pensamiento objetivo, dando mayor importancia al razonamiento y a la reflexión, antes que a la mecanización y memorización.
· Apropiar un lenguaje y unos simbolismos propios que le permitan al estudiante comunicarse con claridad y precisión, hacer cálculos con seguridad, manejar representaciones gráficas para comprender el mundo en que vive.
· Proporcionar herramientas para la aplicación de conocimientos mediante la formulación, interpretación y análisis de fenómenos propios de su profesión y de las ciencias relacionadas.
· Utilizar el lenguaje matemático y de la lógica para modelar situaciones cotidianas.
· Identificar ecuaciones e inecuaciones en el desarrollo de problemas específicos de su formación.
· Estudiar las figuras planas y del espacio.

Fase 4. Planteamiento y solución guiada paso a paso de cada uno de los problemas seleccionados, a través de las aplicaciones software, orientar al estudiante en el uso de estas herramientas y las funcionalidades que ofrecen, y también en la interpretación de los resultados en la misma.

Dentro de esta fase es muy importante que el estudiante tenga una total comprensión del problema que se le plantea, diferenciando entre los diferentes tipos de información que ofrece el texto: datos suministrados, las incógnitas o interrogantes. A continuación, el estudiante debe plantear una relación entre los datos y las incógnitas, con la ayuda de esquemas o diagramas ilustrativos. Finalmente, se introduce la ecuación o fórmula al software matemático (Symbolab o Geogebra) para la solución paso a paso.

Es relevante, además, que el estudiante sepa hacer una adecuada interpretación de la respuesta a un problema. Se encuentran situaciones en varias ocasiones en las que los estudiantes procedimentalmente resuelven adecuadamente una ecuación, pero fallan en el entendimiento de la respuesta y, además, en las unidades físicas en las que se debe dar la misma.

FUNDAMENTACIÓN CURRICULAR Y DIDÁCTICA

Con el presente material docente, se busca que el estudiante adquiera autonomía de aprendizaje en su tiempo de trabajo independiente (extra clase). Es él el protagonista, el elemento activo dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, siguiendo los nuevos esquemas de una educación autogestionada, apartándose de las prácticas tradicionales de formación del profesional, e incluyendo las nuevas tecnologías de la información.

La gestión del conocimiento en la Corporación Universitaria Comfacauca (Unicomfacauca) se concentra en aunar "todos los esfuerzos para lograr autonomía en el aprendizaje del estudiante. En este sentido, el currículo como sistema enfocará su trabajo a lograr este propósito" según el *Plan Educativo Institucional* (Unicomfacauca, 2014, p. 28).

Siguiendo el PEI de la corporación, dentro de las estrategias pedagógicas que la Corporación promueve, están los talleres y el aprendizaje basado en problemas, los que cobran relevancia en el presente material de apoyo docente:

> · Talleres: esta estrategia se usa como una metodología de trabajo atractiva cuando hay que integrar la teoría y la práctica. En Unicomfacauca se usan no sólo los talleres de tipo pedagógico donde se desarrollan actividades de reflexión, aplicación intelectual, actitudinal y de destrezas expresivas y lingüísticas, sino los talleres de tipo técnico por la naturaleza de sus programas académicos donde predominan las actividades de diseño, planeación, ejecución y manejo de herramientas y/o equipos especializados (Unicomfacauca, 2014, p. 29).
>
> · El ABP es un enfoque pedagógico que trata de que un grupo de estudiantes que deben trabajar de manera autónoma, con el acompañamiento, a manera de guía, del docente, encuentren la solución a una situación problemática. Al hablar de autonomía, los estudiantes deben buscar los medios para entender e integrar los conceptos necesarios para resolver el problema, además de otros conceptos relacionados. Así, ellos mismos pueden elaborar un panorama de sus necesidades de aprendizaje, construir el conocimiento necesario, evaluarse permanentemente y además darle significado al trabajar con otras personas (Unicomfacauca, 2014, p. 30).

Durante el proceso, el estudiante se retroalimenta con el software matemático y aprende de sus errores con el propósito de potenciar sus competencias matemáticas en el área. Claro está que el proceso de articulación entre la fundamentación matemática y el software requiere de un profesor motivador, así los estudiantes encontrarán interesante el ejercicio y entenderán la importancia de verificar su conocimiento con la ayuda de estas herramientas.

CAPÍTULO 1:
Ejercicios de ecuaciones

Ecuaciones lineales

Solucionar las siguientes ecuaciones lineales.

a) $5y - 3 = y + 9$
b) $x - (4 - x) = 5(x + 1) + x$
c) $\sqrt{2}\,x - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}x$
d) $(x - 2)^3 = x^2(x - 6) + 2x$
e) $0{,}27x - 1{,}75 = -0{,}7$

Soluciones

Para la solución de ecuaciones con el software Symbolab, se ingresa a la siguiente página web: https://es.symbolab.com

Una vez dentro, se selecciona la opción *Solutions*, ver Figura 1.

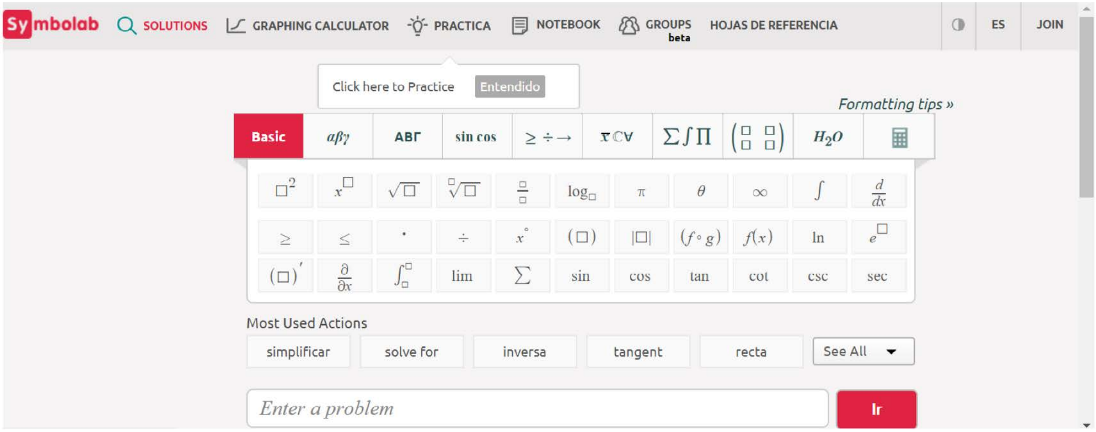


Figura 1
Paso 1
Fuente: elaboración propia.

Y en el campo de texto *Enter a problem*, se ingresa la ecuación a resolver o solucionar. A continuación, el software muestra la solución paso a paso de la ecuación ingresada.

Solución ecuación a

Solución

Mostrar pasos

$5y-3=y+9 \quad : \quad y=3$

Pasos

$5y-3=y+9$

Sumar 3 a ambos lados

$5y-3+3=y+9+3$

Simplificar

$5y=y+12$

Restar y de ambos lados

$5y-y=y+12-y$

Simplificar

$4y=12$

Dividir ambos lados entre 4

$\frac{4y}{4}=\frac{12}{4}$

Simplificar

$y=3$

click here to practice linear equations »

Tienes una respuesta diferente? Verifica si es correcta

Verificar

Figura 2
Solución ecuación a
Fuente: elaboración propia.

Solución ecuación b

Solución

Mostrar pasos

$x-(4-x)=5(x+1)+x \quad : \quad x=-\frac{9}{4}$ (Decimal: $x=-2.25$)

Pasos

$x-(4-x)=5(x+1)+x$

Restar x de ambos lados

$x-(4-x)-x=5(x+1)+x-x$

Simplificar

$-(4-x)=5(x+1)$

Desarrollar $-(4-x)$: $\quad -4+x$ *Mostrar pasos*

Desarrollar $5(x+1)$: $\quad 5x+5$ *Mostrar pasos*

$-4+x=5x+5$

Sumar 4 a ambos lados

$-4+x+4=5x+5+4$

Simplificar

$x=5x+9$

Restar $5x$ de ambos lados

$x-5x=5x+9-5x$

Simplificar

$-4x=9$

Dividir ambos lados entre -4

$\frac{-4x}{-4}=\frac{9}{-4}$

Simplificar

$x=-\frac{9}{4}$

click here to practice linear equations »

Tienes una respuesta diferente? Verifica si es correcta

Verificar

Figura 3
Solución ecuación b
Fuente: elaboración propia.

Solución ecuación c

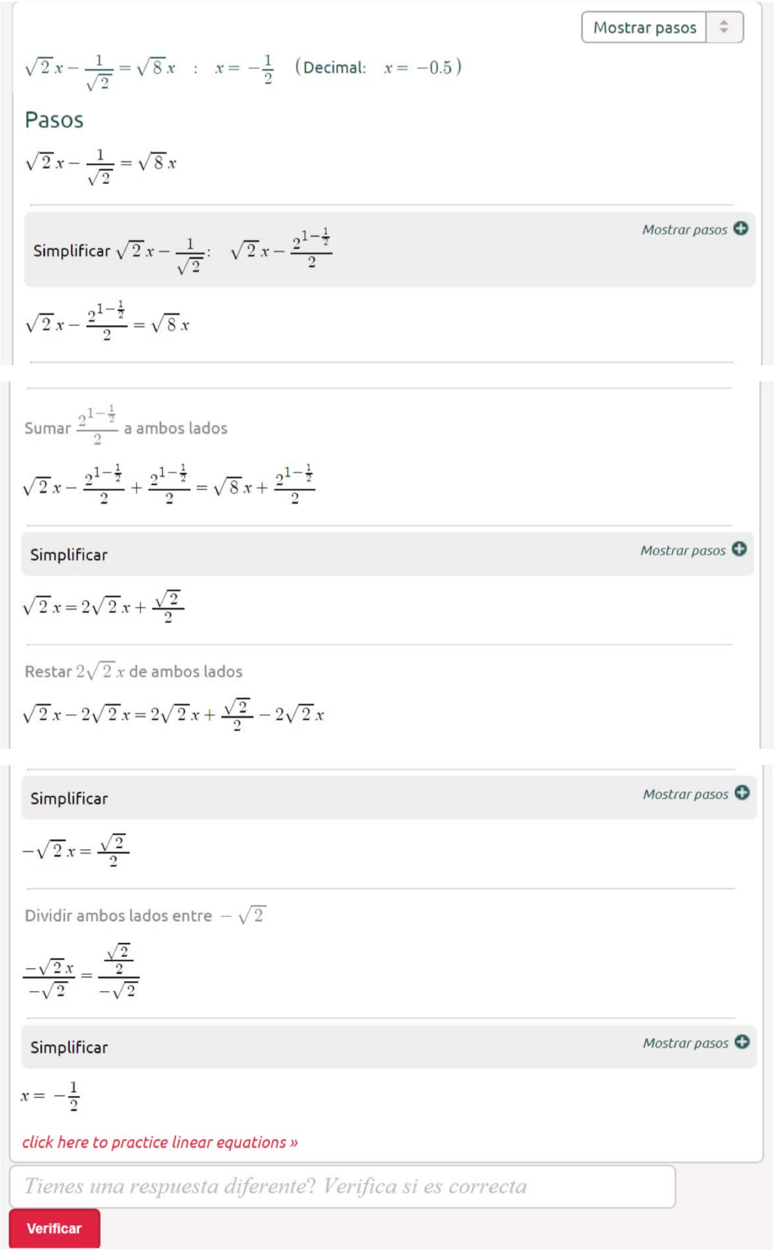


Figura 4
Solución ecuación c
Fuente: elaboración propia.

Solución ecuación d

Solución

Mostrar pasos

$(x-2)^3 = x^2(x-6)+2x \quad : \quad x=\frac{4}{5} \quad$ (Decimal: $x=0.8$)

Pasos

$(x-2)^3 = x^2(x-6)+2x$

Expandir $x^2(x-6)$: x^3-6x^2 — *Mostrar pasos*

$x^3-6x^2+12x-8 = x^3-6x^2+2x$

Desarrollar $(x-2)^3$: $x^3-6x^2+12x-8$ — *Mostrar pasos*

$x^3-6x^2+12x-8 = x^3-6x^2+2x$

Sumar 8 a ambos lados

$x^3-6x^2+12x-8+8 = x^3-6x^2+2x+8$

Simplificar

$x^3-6x^2+12x = x^3-6x^2+2x+8$

Restar x^3-6x^2+2x de ambos lados

$x^3-6x^2+12x-(x^3-6x^2+2x) = x^3-6x^2+2x+8-(x^3-6x^2+2x)$

Simplificar

$10x = 8$

Dividir ambos lados entre 10

$\frac{10x}{10} = \frac{8}{10}$

Simplificar

$x = \frac{4}{5}$

click here to practice linear equations »

Tienes una respuesta diferente? Verifica si es correcta

Verificar

Figura 5
Solución ecuación d
Fuente: elaboración propia.

Solución ecuación e

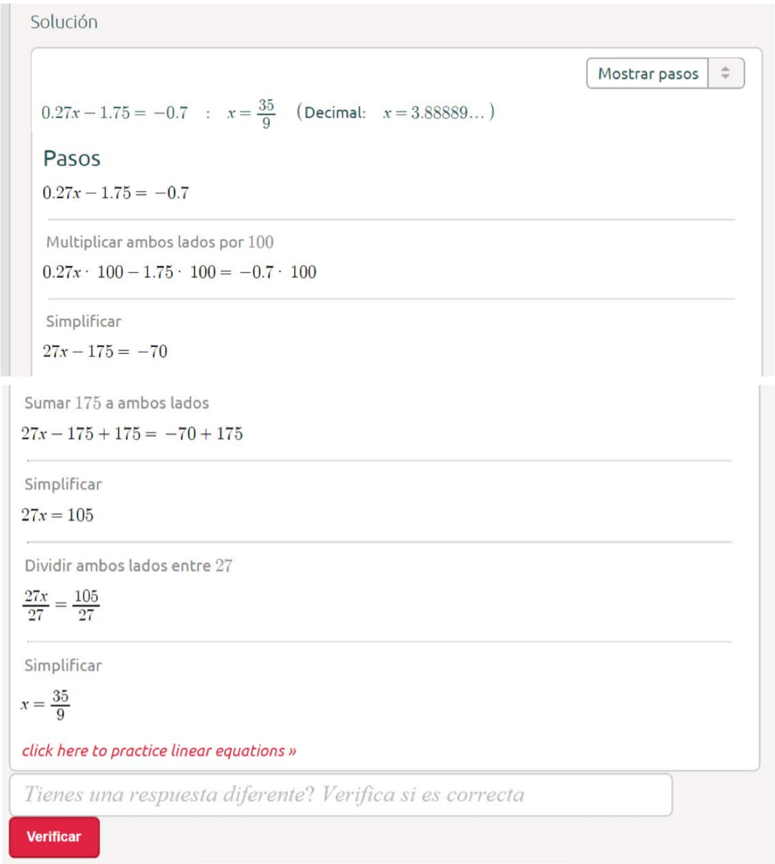


Figura 6
Solución ecuación e
Fuente: elaboración propia.

Problemas relacionados con ecuaciones lineales

Problema a

La velocidad *v* en pies/segundo de una bola tenis es *t* segundos después de que ha sido lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 1pie/s, está dada por *v*= -32t+7v. Cuántos segundos han transcurrido cuando *v* = 5pies/s y v = 3pies/s. Ejercicio adaptado de Zill y Dewar (2000).

Solución

Se reemplaza en la ecuación, *v* = -32t + 7, cada uno de los valores de velocidad dados y se resuelve

$$5 = -32t + 7$$

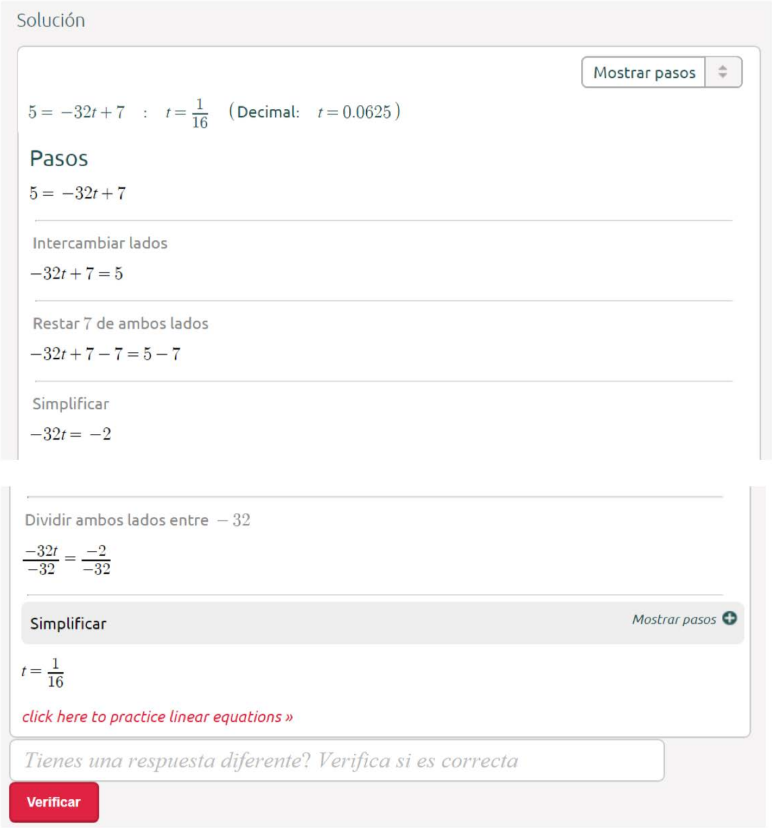


Figura 7
Solución problema a (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Como + resultado se tiene que se alcanza una velocidad de 5pies/s a los 0,0625s

$$3 = -32t + 7$$

Figura 8
Solución problema a (segunda parte)
Fuente: elaboración propia.

Como resultado se tiene que se alcanza una velocidad de 3pies/s a los 0,125s.

Problema b

La relación entre la temperatura medida en grados centígrados C y en grados Fahrenheit F está dada por:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Halle la temperatura Fahrenheit correspondiente si:

- La temperatura normal del cuerpo humano es de 37°C
- La temperatura ambiente normal es de 21,11°C. Ejercicio adaptado de Zill y Dewar (2000).

Solución

Se reemplaza en la ecuación dada cada uno de los valores de grados centígrados dados y se resuelve. Primero, hay que convertir 37 grados centígrados a Fahrenheit:

$$37 = \frac{5}{9}(F - 32)$$

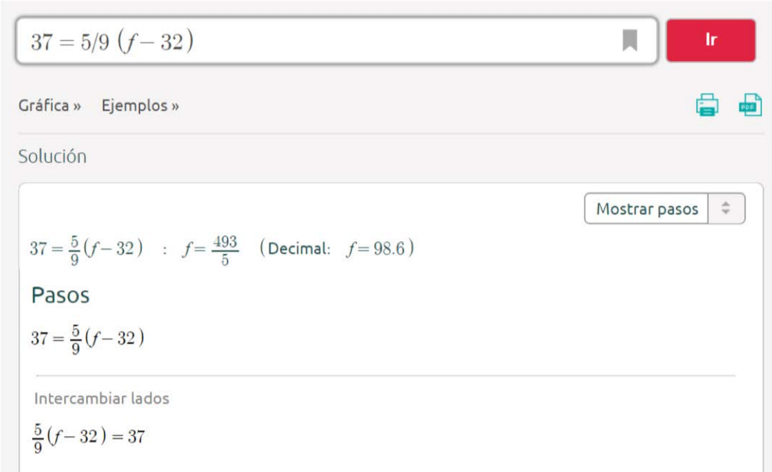


Figura 9
Solución problema b (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Con lo que se obtienen 493/5 = 98,6 °F para 37 °C Ahora, hay que convertir 21,11 grados centígrados a grados Fahrenheit:

$$21{,}11 = \frac{5}{9}(F - 32)$$

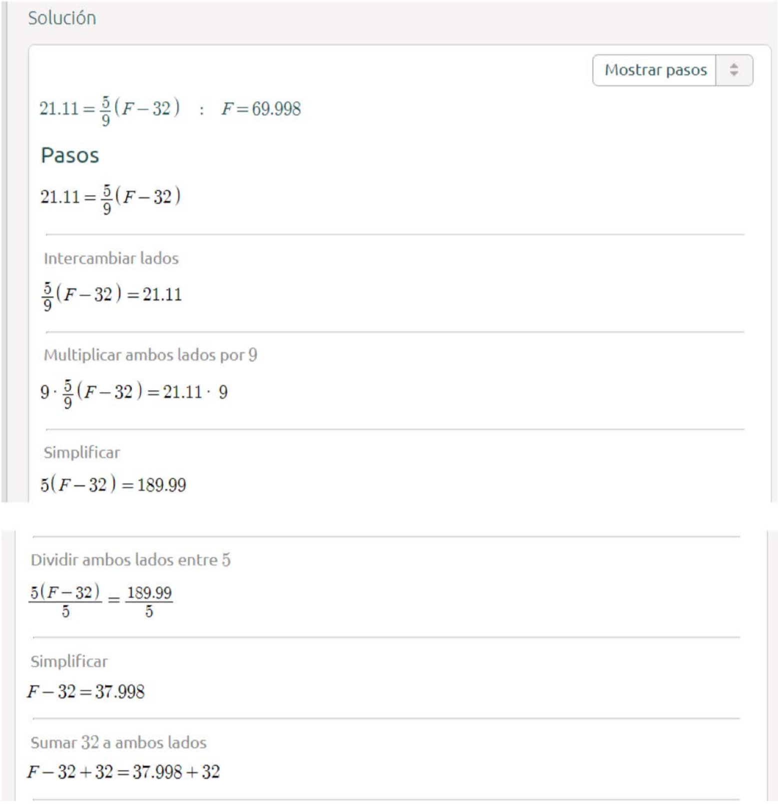


Figura 10
Solución problema b (segunda parte)
Fuente: elaboración propia.

Con lo que se obtienen 69,998 °F para 21,11°C

Problema c

Estudios empíricos sobre la nevasca en el Reino Unido, encontraron que el número de días *D* en un año en el que el suelo está cubierto de nieve aumenta linealmente con la altitud, según la siguiente ecuación:

$$D = 0{,}155H - 11$$

Donde H es la altura medida en metros. Según esta fórmula, ¿qué altura toma una capa de nieve durante un año completo? (365 días). Ejercicio adaptado de Zill y Dewar (2000).

Solución

En la fórmula dada se reemplaza *D* por 365 y se resuelve obteniéndose así la altura solicitada.

$$365 = 0{,}155H - 11$$

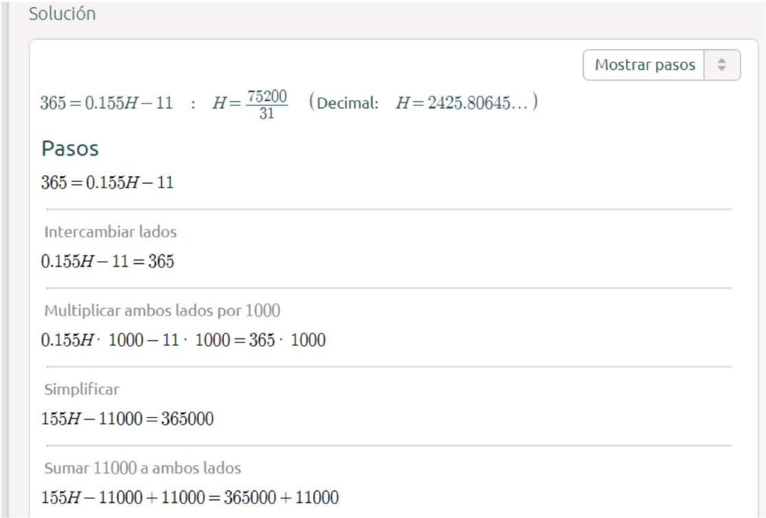


Figura 11
Solución problema c
Fuente: elaboración propia.

Se obtiene una H = 75200/31 = 2425,80 metros.

Problema d

Encuentre dos números cuya suma sea 50 y cuya diferencia sea 26. Ejercicio adaptado de Zill y Dewar (2000).

Solución

Siendo los números desconocidos, se representan con las variables X, Y. La suma de dichos números se representa con la ecuación:

$$X+Y=50$$

La diferencia de dichos números se representa con la ecuación:

$$X-Y=26$$

Dentro del área de Algebra del Symbolab, está la opción de solución de sistemas de ecuaciones.

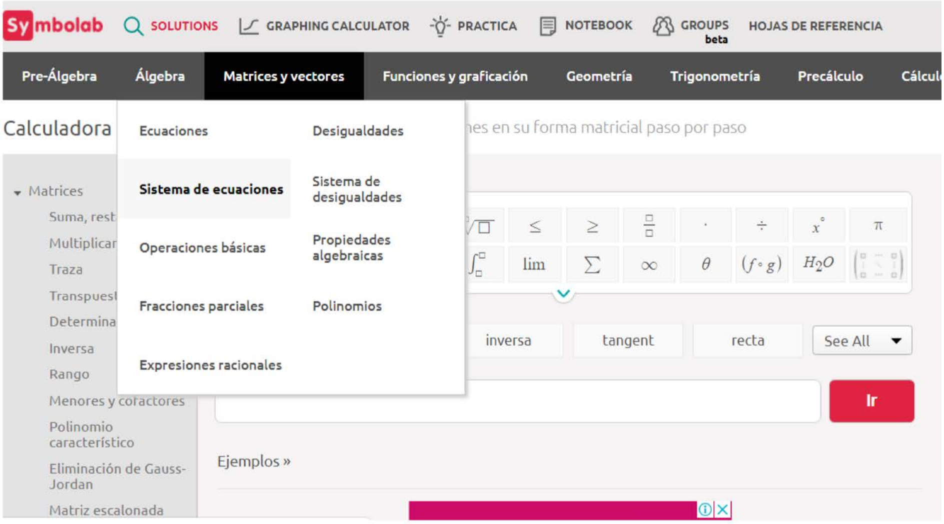


Figura 12
Paso 1 para resolver ecuaciones.
Fuente: elaboración propia.

Se introducen las dos ecuaciones separadas por una coma.

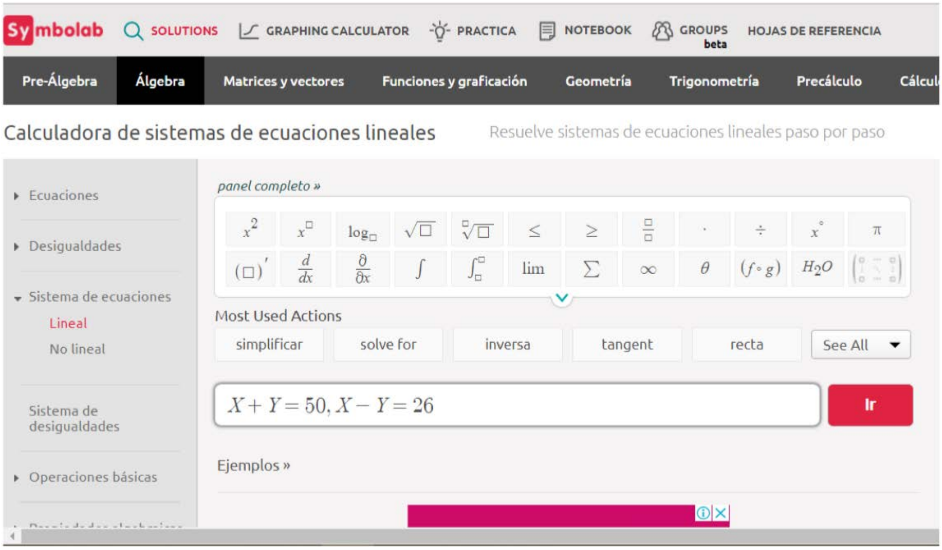


Figura 13
Paso 2 para resolver ecuaciones.
Fuente: elaboración propia.

Y se soluciona, escogiendo el método deseado (sustitución, eliminación, regla de Cramer). En este caso se escogió el método de sustitución

Figura 14
Método de sustitución
Fuente: elaboración propia.

Se observa en la respuesta que los números son X= 38 y Y= 12. El estudiante puede verificar que efectivamente estos dos números sumados dan 50 y restados dan 26.

Problema e

La firma sanitaria Papik e hijo anuncia 33 años de experiencia en higiene sanitaria. Si el padre tiene 17 años más de experiencia en higiene sanitaria que su hijo, ¿cuánto tiempo de experiencia tiene cada uno? ejercicio adaptado de Zill y Dewar (2000).

Solución

Sean las variables X (experiencia del padre), Y (experiencia del hijo), se tienen las siguientes ecuaciones según el enunciado:

$$X + Y = 33$$

$$X = Y + 17$$

Se introduce este sistema de ecuaciones en el Symbolab y se resuelve:

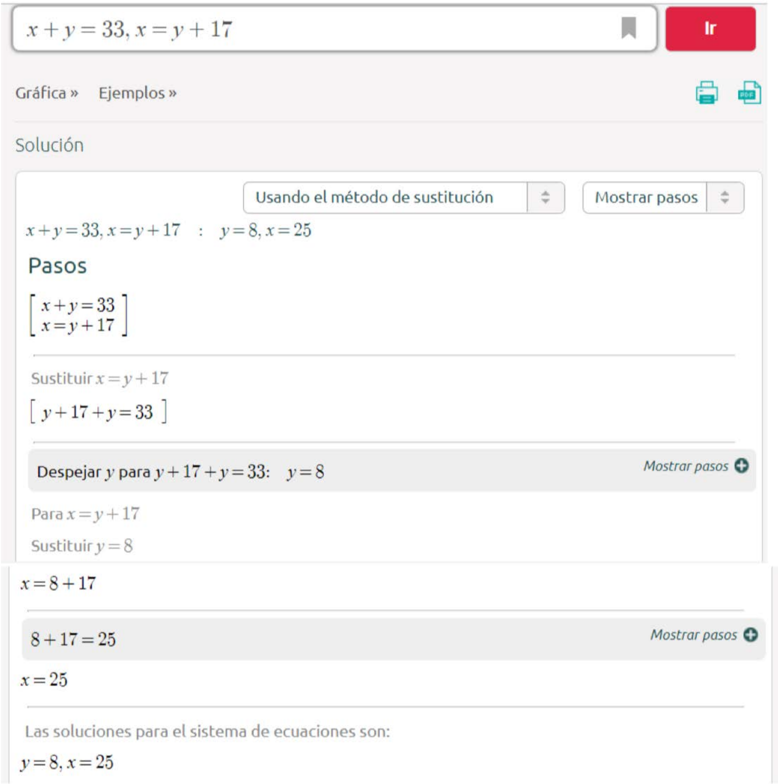


Figura 15
Solución problema e
Fuente: elaboración propia.

Se observa en la solución que la experiencia del padre es de 25 años y la experiencia del hijo es de 8 años.

Problema f

La señora Beecham invirtió una parte de U $12.000 en un certificado de ahorros al 9 % de interés simple. El resto lo invirtió en un título que producía 14 %. Si recibió un total de U $1.400 de interés por el primer año, ¿cuánto dinero invirtió en el título? Ejercicio adaptado de Zill y Dewar (2000).

Solución

Lo primero por hacer es definir la variables o incógnitas del problema.
Sean X: dinero invertido en certificado de ahorro
Y: dinero invertido en título valor

Se plantean según el enunciado, las siguientes ecuaciones:

$$X + Y = 12000$$

$$0{,}09\,X + 0{,}14\,Y = 1400$$

Se introduce el sistema de ecuaciones al software y se resuelve:

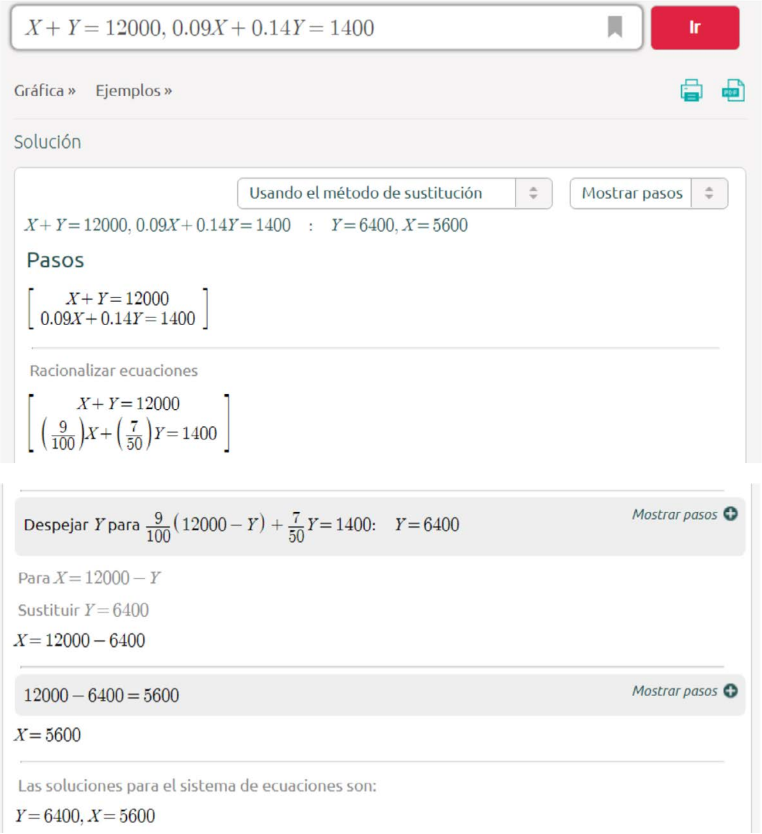


Figura 16
Solución problema f
Fuente: elaboración propia.

Según el resultado obtenido, la señora invirtió U$ 6400 en el título.

Problema g

Un auto viaja del punto A al punto B a una velocidad promedio de 55 km/h y regresa a una velocidad de 50 km/h. Si todo el viaje le tomó 7 horas, ¿cuál es la distancia entre A y B?

Solución

Sea X = tiempo que toma ir de A a B
Sea Y = tiempo que toma ir de B a A

Se sabe la distancia recorrida es d = vt. Las distancias de ida y vuelta son obviamente iguales. Con lo que se plantean las siguientes ecuaciones:

$$X + Y = 7$$

$$55X = 50Y$$

Se ingresa el sistema de ecuaciones al Symbolab y se resuelve. Ver Figura 16.

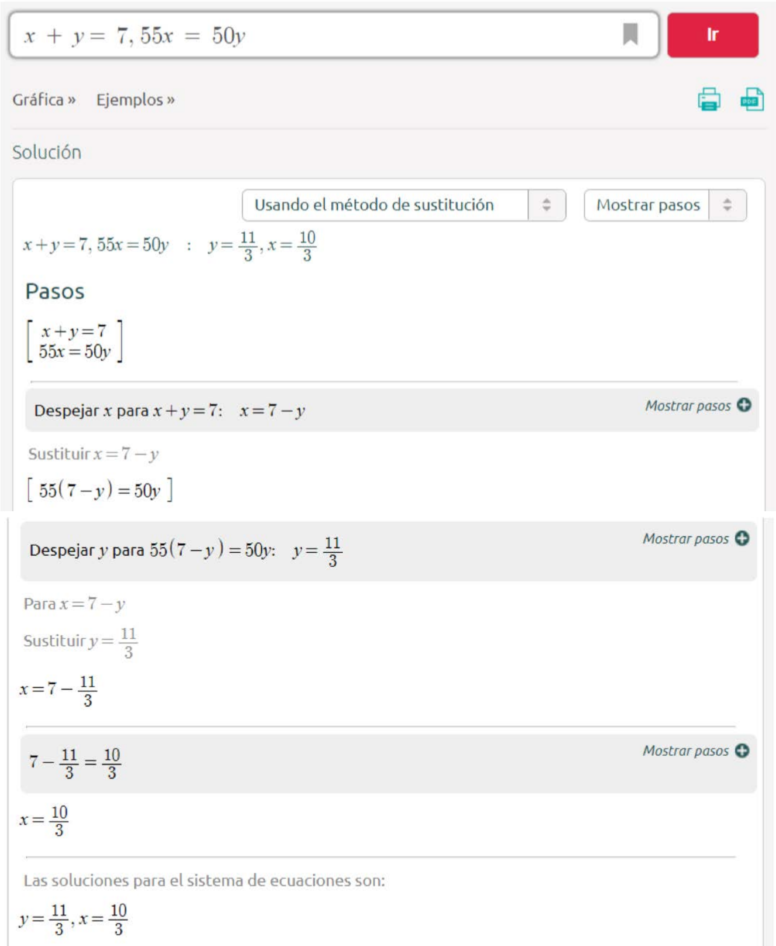


Figura 17
Solución problema g
Fuente: elaboración propia.

Con ello se obtiene que la distancia entre A y B es: $55 * \frac{10}{3} = 183{,}33\ km$

Problema h

Una mujer puede ir caminando al trabajo a una velocidad de 3 km/h, o en una bicicleta a una velocidad de 12 km/h. Si le toma una hora más caminando que yendo en bicicleta, encuentre el tiempo que le toma caminar para ir al trabajo.

Solución

Sean las variables

x: tiempo (en horas) que le toma ir caminando

y: tiempo (en horas) que le toma ir en bicicleta

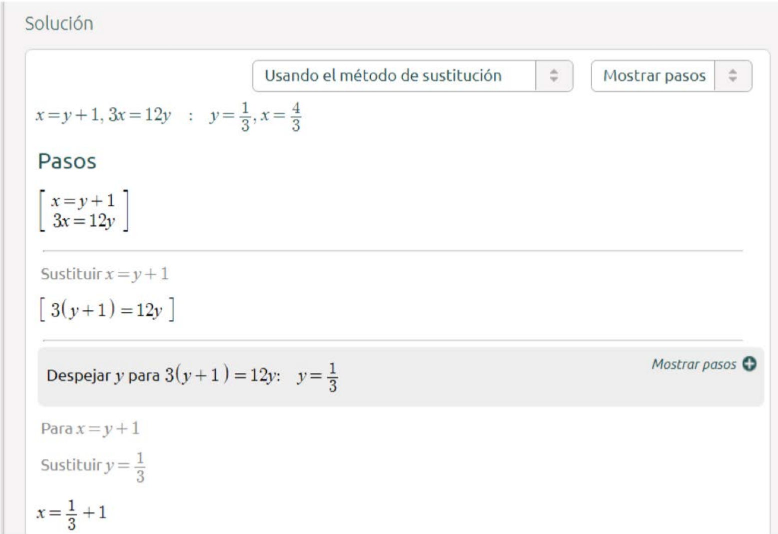
Según el enunciado, se tiene:

$x = y + 1$

Como la distancia recorrida es la misma, se tiene:

$3x = 12\,y$

Se ingresa el sistema de ecuaciones al Symbolab y se resuelve:


Solución

Usando el método de sustitución | Mostrar pasos

$x = y + 1,\ 3x = 12y \quad : \quad y = \frac{1}{3},\ x = \frac{4}{3}$

Pasos

$\begin{bmatrix} x = y + 1 \\ 3x = 12y \end{bmatrix}$

Sustituir $x = y + 1$

$\left[\, 3(y+1) = 12y \,\right]$

Despejar y para $3(y+1) = 12y$: $\quad y = \frac{1}{3}$ — Mostrar pasos

Para $x = y + 1$

Sustituir $y = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3} + 1$

Figura 18
Solución problema h
Fuente: elaboración propia.

Con lo que se determina que el tiempo que le toma a la señora ir al trabajo caminando es x=4/3h = 1,33h (80 minutos). Es coherente la respuesta, debido a que 80 minutos representan 1 hora más del tiempo que toma ir en bicicleta que es y =1/3h (20 minutos).

Problema i

Karen puede recoger un sembrado de frambuesas en 5 ½ horas y Stan puede hacerlo en 8 horas. Encuentre qué tan rápido pueden recoger el sembrado juntos.

Solución

Sea x el tiempo que les toma a las dos personas juntas recoger el sembrado de frambuesas.

Con la información del enunciado se tiene que:

Karen hace: $\frac{x}{5,5}$

Stan hace: $\frac{x}{8}$

Cada una de las anteriores expresiones representa la fracción de trabajo del total, que le toma a cada una realizarlo. Sumadas, como se muestra a continuación, representa el 100 % del trabajo. Con lo que:

$$\frac{x}{5.5} + \frac{x}{8} = 1$$

Se ingresa esta ecuación al Symbolab y se resuelve.

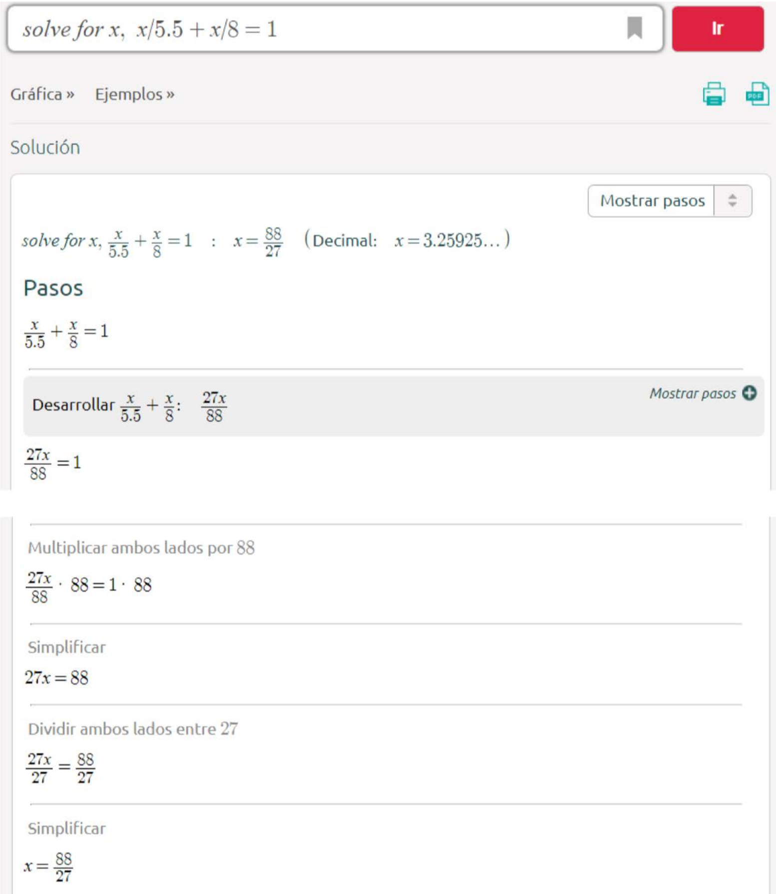


Figura 19
Solución problema i
Fuente: elaboración propia.

Se obtiene que en x = 88/27 = 3,25 horas, las dos personas hacen el trabajo juntas.

Ecuaciones cuadráticas

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + x - 1 = 0$
b) $1 - 25x^2 = 0$
c) $2(5 - 3x)^2 = 6x^2 + 50$
d) $2x(x - 1) = 1$
e) $6x^4 + - 7x^2 - 2 = 0$

Soluciones

Se introduce la ecuación cuadrática en el campo de soluciones de ecuaciones cuadráticas del Symblab, y se resuelve por cualquiera de los tres métodos existentes para ello: factorización, formula general, o completando el cuadrado.

La ecuación cuadrática a se resuelve mediante factorización.

Solución ecuación a

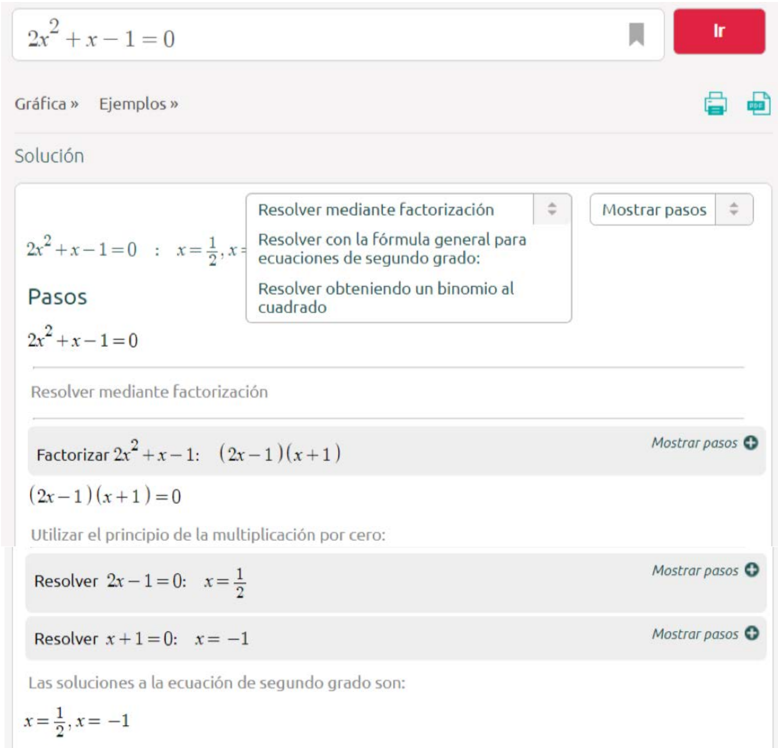


Figura 20
Solución ecuación a
Fuente: elaboración propia.

Se obtienen así las dos soluciones o raíces de la ecuación cuadrática: $x = \frac{1}{2}$, $x = -1$

Solución ecuación b

$1 - 25x^2 = 0$

Ir

Gráfica » Ejemplos »

Solución

Mostrar pasos

$1-25x^2=0 \quad : \quad x=\frac{1}{5}, x=-\frac{1}{5}$ (Decimal: $x=0.2, x=-0.2$)

Pasos

$1-25x^2=0$

Restar 1 de ambos lados

$1-25x^2-1=0-1$

Simplificar

$-25x^2=-1$

Dividir ambos lados entre -25

$\frac{-25x^2}{-25}=\frac{-1}{-25}$

Simplificar

$x^2=\frac{1}{25}$

Para $x^2=f(a)$ las soluciones son $x=\sqrt{f(a)}, \ -\sqrt{f(a)}$

$x=\sqrt{\frac{1}{25}}, x=-\sqrt{\frac{1}{25}}$

$\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$ *Mostrar pasos*

$-\sqrt{\frac{1}{25}}=-\frac{1}{5}$ *Mostrar pasos*

$x=\frac{1}{5}, x=-\frac{1}{5}$

Figura 21
Solución ecuación b
Fuente: elaboración propia.

Se obtienen así las dos soluciones o raíces de la ecuación cuadrática: $x = 1/5, x = -1/5$.

Solución ecuación c

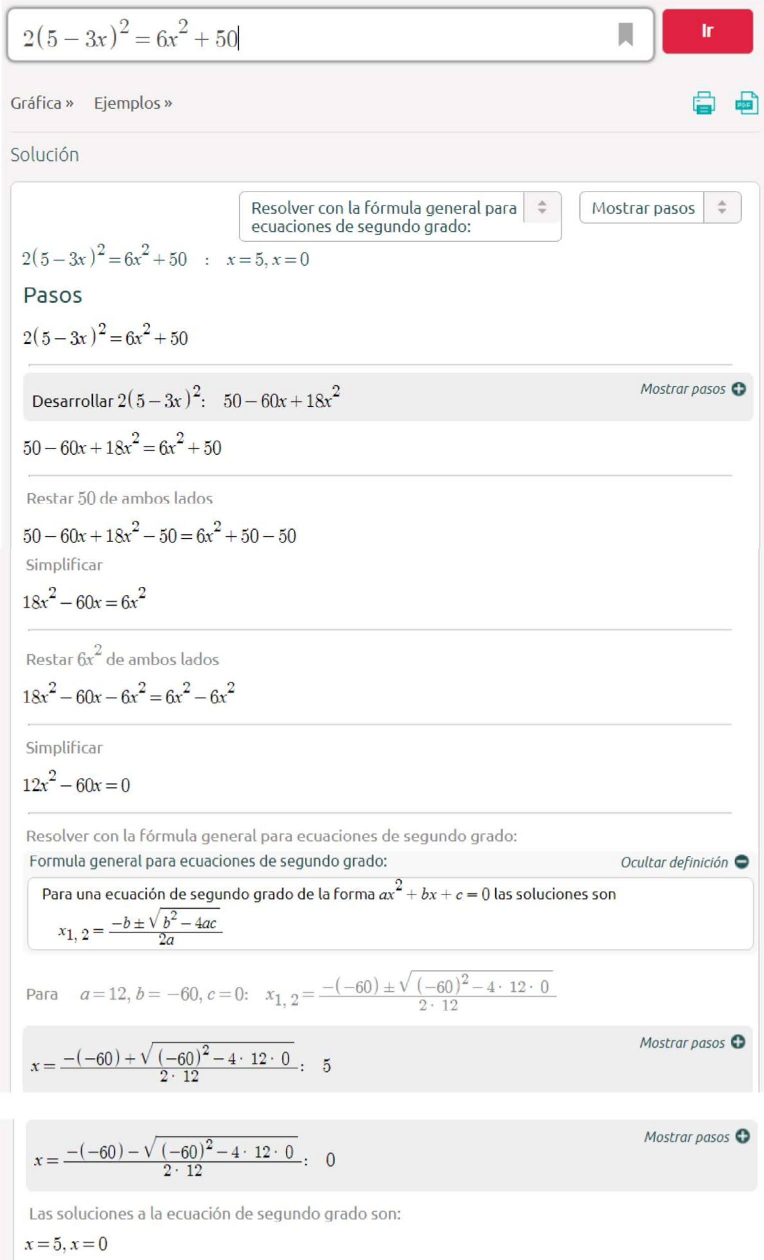


Figura 22
Solución ecuación c, mediante fórmula general
Fuente: elaboración propia.

Se obtienen así las dos soluciones o raíces de la ecuación cuadrática: $\mathbf{x} = 5,\ \mathbf{x} = 0$

Solución ecuación d

$2x(x-1)=1$

Ir

Gráfica » Ejemplos »

Solución

Resolver obteniendo un binomio al cuadrado

Mostrar pasos

$2x(x-1)=1 \quad : \quad x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}, x=\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$

Pasos

$2x(x-1)=1$

Desarrollar $2x(x-1)$: $2x^2-2x$

Mostrar pasos

$2x^2-2x=1$

Dividir ambos lados entre 2

$\frac{2x^2-2x}{2}=\frac{1}{2}$

$x^2-x=\frac{1}{2}$

Resolver obteniendo un binomio al cuadrado

Escribir ecuación en la forma: $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

Resolver para a, $2ax=-1x$: $a=-\frac{1}{2}$

Mostrar pasos

Sumar $a^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ a ambos lados

$x^2-x+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

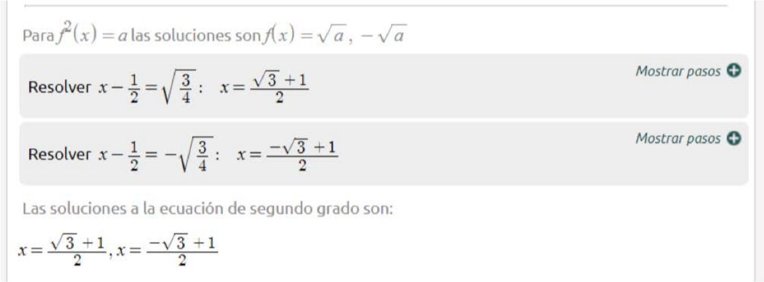
Simplificar $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2$: $\frac{3}{4}$

Mostrar pasos

$x^2-x+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

Completar el cuadrado

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$



Para $f^2(x) = a$ las soluciones son $f(x) = \sqrt{a}, -\sqrt{a}$

Resolver $x - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$: $x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ Mostrar pasos

Resolver $x - \frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$: $x = \frac{-\sqrt{3}+1}{2}$ Mostrar pasos

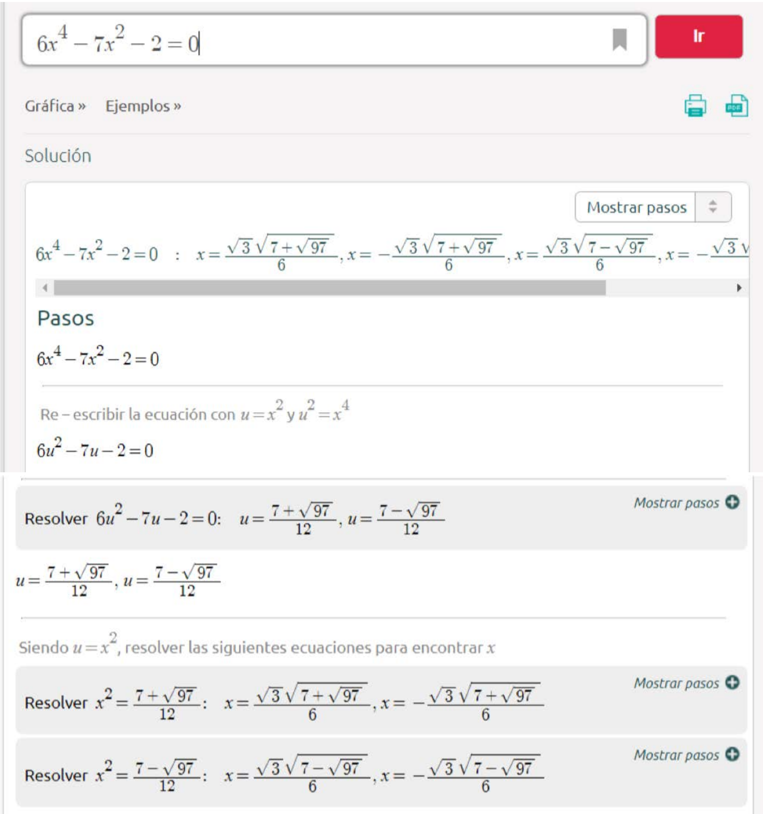
Las soluciones a la ecuación de segundo grado son:

$x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, x = \frac{-\sqrt{3}+1}{2}$

Figura 23
Solución ecuación d (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Se obtienen así las dos soluciones o raíces de la ecuación cuadrática.

Solución ecuación e



$6x^4 - 7x^2 - 2 = 0$ Ir

Gráfica » Ejemplos »

Solución

Mostrar pasos

$6x^4 - 7x^2 - 2 = 0$: $x = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7+\sqrt{97}}}{6}, x = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{7+\sqrt{97}}}{6}, x = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7-\sqrt{97}}}{6}, x = -\sqrt{3}$

Pasos

$6x^4 - 7x^2 - 2 = 0$

Re − escribir la ecuación con $u = x^2$ y $u^2 = x^4$

$6u^2 - 7u - 2 = 0$

Resolver $6u^2 - 7u - 2 = 0$: $u = \frac{7+\sqrt{97}}{12}, u = \frac{7-\sqrt{97}}{12}$ Mostrar pasos

$u = \frac{7+\sqrt{97}}{12}, u = \frac{7-\sqrt{97}}{12}$

Siendo $u = x^2$, resolver las siguientes ecuaciones para encontrar x

Resolver $x^2 = \frac{7+\sqrt{97}}{12}$: $x = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7+\sqrt{97}}}{6}, x = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{7+\sqrt{97}}}{6}$ Mostrar pasos

Resolver $x^2 = \frac{7-\sqrt{97}}{12}$: $x = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7-\sqrt{97}}}{6}, x = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{7-\sqrt{97}}}{6}$ Mostrar pasos

La solución es

$$x=\frac{\sqrt{3}\sqrt{7+\sqrt{97}}}{6},\ x=-\frac{\sqrt{3}\sqrt{7+\sqrt{97}}}{6},\ x=\frac{\sqrt{3}\sqrt{7-\sqrt{97}}}{6},\ x=-\frac{\sqrt{3}\sqrt{7-\sqrt{97}}}{6}$$

Figura 24
Solución ecuación e
Fuente: elaboración propia.

En esta ocasión se resolvió una ecuación de grado 4, es decir que tiene 4 soluciones o raíces.

En esta ocasión se resolvió una ecuación de grado 4, es decir que tiene 4 soluciones o raíces.

Resolver los siguientes problemas relacionados con ecuaciones cuadráticas.

Problema a

La base de un triángulo es 3 cm más larga que la altura. Si el área del triángulo es de 119 cm^2, halle la base y la altura.

Solución

Sea la variable *x* la que representa la altura del triángulo. Es decir que la base es:

$$x+3$$

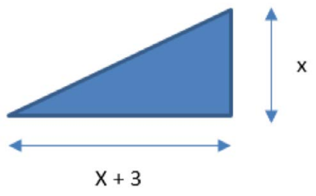


Figura 25
Representación problema a
Fuente: elaboración propia.

Entonces, recordando que el área de un triángulo está dada la multiplicación su base por su altura *t* y luego todo se dividide entre 2. Por expresión matemática queda:

$$\frac{x(x+3)}{2}=119$$

Se introduce esta ecuación en el Symbolab, y se resuelve:

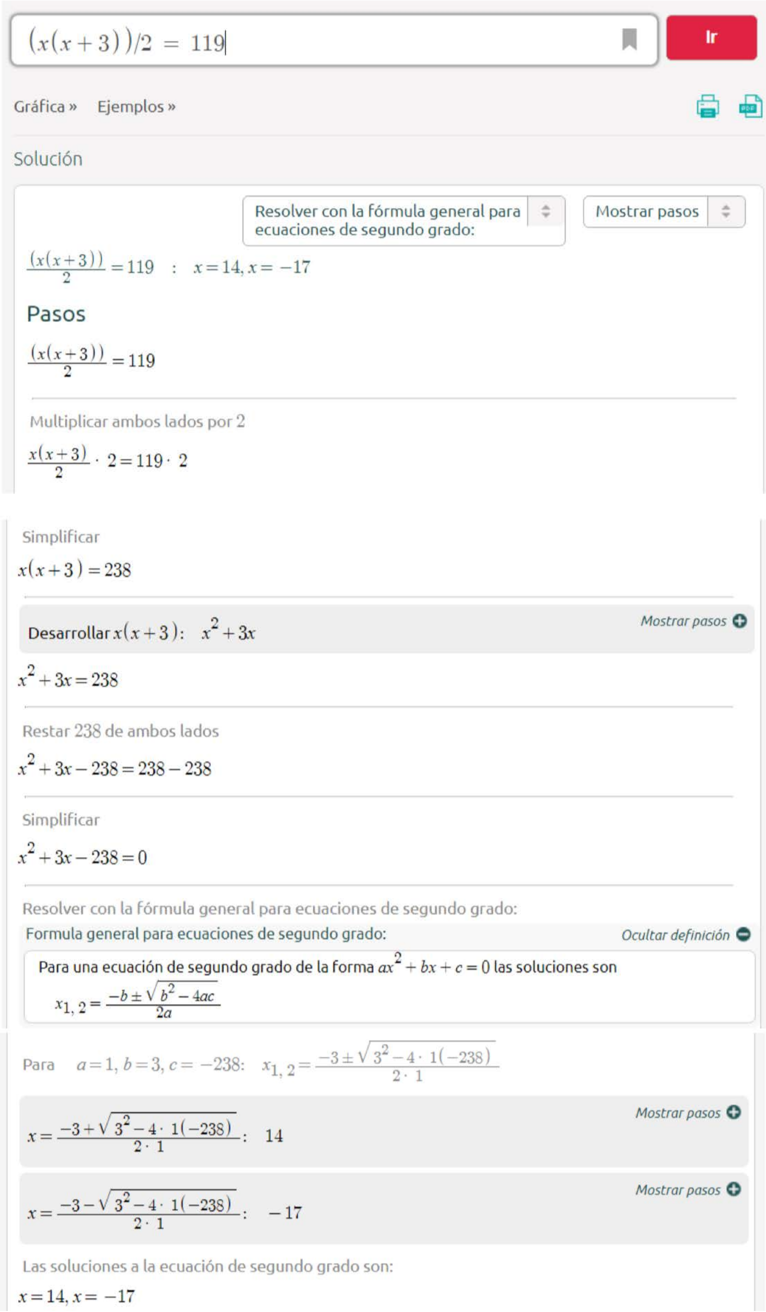


Figura 26
Solución problema a
Fuente: elaboración propia.

Se obtienen dos valores, de los cuales por el contexto del problema se toma el valor positivo x= 14 (las distancias son siempre positivas), con lo que la altura del triángulo es de 14 cm y la base como es 3 cm mayor, será de 17 cm.

Problema b

Un hombre desea construir una caja metálica abierta. La caja debe tener una base cuadrada, los lados de 10 cm de altura y una capacidad de 6760 cm^3. Determine el tamaño de la pieza cuadrada de metal que se debe utilizar para construir la caja.

Solución

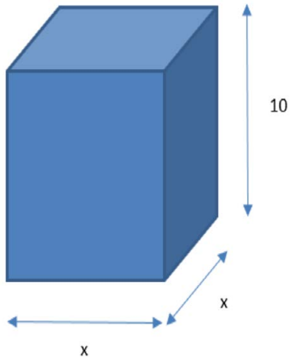


Figura 27
Representación problema b
Fuente: elaboración propia.

El volumen de una caja se obtiene con el producto de las tres dimensiones (largo x ancho x alto) con lo que la ecuación matemática que representa la situación del problema es:

$$x * x * 10 = 6760 \text{ (Volumen o capacidad de la caja)}$$

$$x^2 * 10 = 6760$$

Se introduce la ecuación al Symbolab y se resuelve.

Pasos

$$x^2 \cdot 10 = 6760$$

Dividir ambos lados entre 10

$$\frac{x^2 \cdot 10}{10} = \frac{6760}{10}$$

Simplificar

$$x^2 = 676$$

Para $x^2 = f(a)$ las soluciones son $x = \sqrt{f(a)}\,,\ -\sqrt{f(a)}$

$$x = \sqrt{676}\,,\ x = -\sqrt{676}$$

$\sqrt{676} = 26$ Mostrar pasos

$-\sqrt{676} = -26$ Mostrar pasos

$$x = 26,\ x = -26$$

Figura 28
Solución problema b (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Se considera la respuesta positiva x = 26. Obsérvese en la siguiente imagen la pieza cuadrada de la que se construyó la caja:

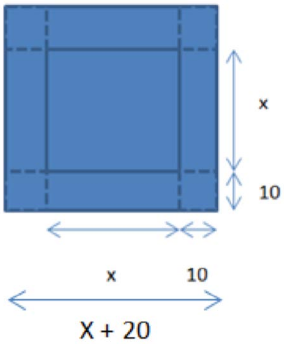


Figura 29
Solución problema b (segunda parte)
Fuente: elaboración propia.

Las esquinas con línea punteada representan los cuadrados que deben recortarse para plegar los cuatro lados de la lámina y formar la caja. Estas esquinas cuadradas tienen justamente un valor de 10 cm de lado (la altura que debe tener la caja). Con ello, la pieza cuadrada con la que se construye la caja debe tener 46 cm de lado: los 26 cm del valor de x sumados con los 20 cm de las dos esquinas.

Problema c

Suponga que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 15 cm más larga que uno de los lados, y ese lado es 15 cm más largo que el otro. Encuentre la longitud de los tres lados de ese triángulo rectángulo.

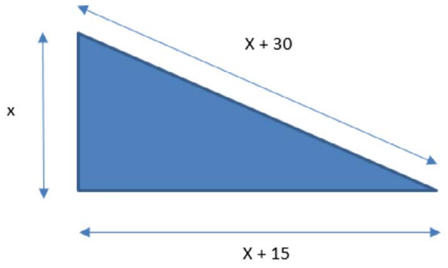


Figura 30
Representación problema c
Fuente: elaboración propia.

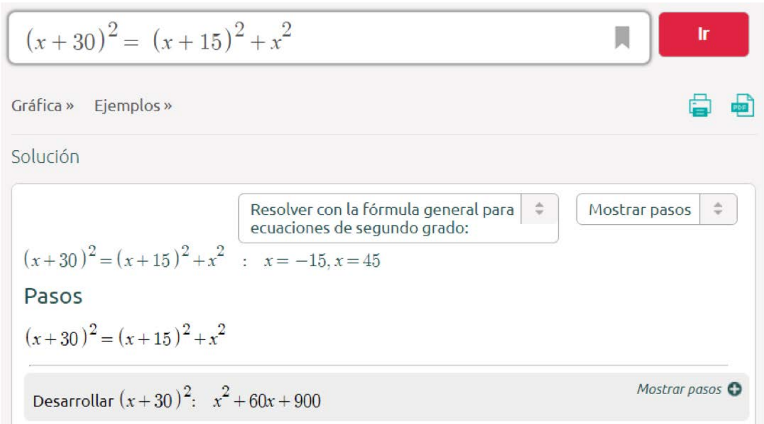
Solución

Según el enunciado, uno de los lados del triángulo se denota con la variable x. El otro lado es 15 cm más largo (x +15), y la hipotenusa es 15 cm más larga que este último (x + 30).

La fórmula o ecuación que relaciona los tres lados de un triángulo rectángulo, es el teorema de Pitágoras, que dice que la suma de los cuadrados de los catetos en un triángulo rectángulo es igual al valor del cuadrado de la hipotenusa. Aplicando dicho teorema en esta situación, se tiene:

$$(x + 30)^2 = (x + 15)^2 + x^2$$

Esta ecuación cuadrática se introduce en el Symbolab y se resuelve.



Desarrollar $(x+15)^2+x^2$: $2x^2+30x+225$ Mostrar pasos

$$x^2+60x+900=2x^2+30x+225$$

Restar 225 de ambos lados

$$x^2+60x+900-225=2x^2+30x+225-225$$

Simplificar

$$x^2+60x+675=2x^2+30x$$

Restar $30x$ de ambos lados

$$x^2+60x+675-30x=2x^2+30x-30x$$

Simplificar

$$x^2+30x+675=2x^2$$

Restar $2x^2$ de ambos lados

$$x^2+30x+675-2x^2=2x^2-2x^2$$

Simplificar

$$-x^2+30x+675=0$$

Resolver con la fórmula general para ecuaciones de segundo grado:

Formula general para ecuaciones de segundo grado: Ocultar definición

Para una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$ las soluciones son

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Para $a=-1, b=30, c=675$: $x_{1,2}=\frac{-30\pm\sqrt{30^2-4(-1)675}}{2(-1)}$

$x=\frac{-30+\sqrt{30^2-4(-1)675}}{2(-1)}$: -15 Mostrar pasos

$x=\frac{-30-\sqrt{30^2-4(-1)675}}{2(-1)}$: 45 Mostrar pasos

Las soluciones a la ecuación de segundo grado son:

$$x=-15, x=45$$

Figura 31
Solución problema c
Fuente: elaboración propia.

Se toma la respuesta positiva x = 45. Con ello, los otros dos lados son de 60 y 75 cm.

Problema d

Un alambre de 40 cm de longitud se cortó en dos pedazos. Una de las partes se dobló haciendo un cuadrado y la otra se dobló haciendo un rectángulo que es tres veces más largo que ancho. La suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado es de 55 ¾. ¿En qué lugar se cortó el alambre?

Solución

Figura 32
Representación problema d
Fuente: elaboración propia.

Según el enunciado, se corta el alambre, pero no se sabe en qué parte, por lo que un pedazo se representa con la variable *x*, y el otro pedazo medirá 40 - *x*.

Ahora, con el primer pedazo x se forma un cuadrado, de manera que cada lado del mismo vale *x/4*.

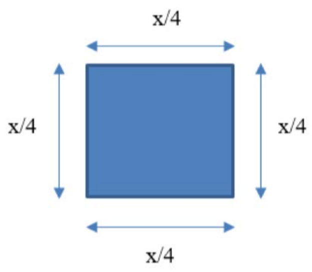


Figura 33
Solución problema d (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Con el segundo pedazo 40 – *x* se forma un rectángulo, que como dice el enunciado, es tres veces más largo que ancho.

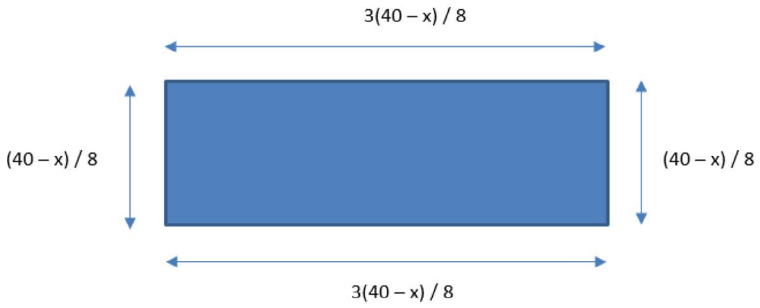


Figura 34
Solución problema d (segunda parte)
Fuente: elaboración propia.

Ahora, la suma de las áreas del cuadrado y el rectángulo se representa con la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{3(40-x)}{8}\frac{(40-x)}{8} = 55{,}75$$

Obsérvese que el primer término del lado izquierdo de la ecuación representa el área del cuadrado (lado por lado, o el lado elevado al cuadrado). El segundo término representa el área del rectángulo(base por altura).

Esta ecuación se introduce en Symbolab y se resuelve.

Solución

Resolver con la fórmula general para ecuaciones de segundo grado:

Mostrar pasos

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2+3\cdot\frac{(40-x)}{8}\cdot\frac{((40-x))}{8}=55.75 \quad : \quad x=28, x=\frac{44}{7}$$

Pasos

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2+3\cdot\frac{(40-x)}{8}\cdot\frac{((40-x))}{8}=55.75$$

Multiplicar ambos lados por 100

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2\cdot 100+3\cdot\frac{40-x}{8}\cdot\frac{(40-x)}{8}\cdot 100=55.75\cdot 100$$

Simplificar

$$\frac{25x^2}{4}+\frac{75(-x+40)^2}{16}=5575$$

Encontrar el mínimo común múltiplo de 4, 16: 16 — *Mostrar pasos*

Multiplicar por el mínimo común múltiplo = 16

$$\frac{25x^2}{4}\cdot 16+\frac{75(-x+40)^2}{16}\cdot 16=5575\cdot 16$$

Simplificar

$$100x^2+75(-x+40)^2=89200$$

Desarrollar $100x^2+75(-x+40)^2$: $175x^2-6000x+120000$ — *Mostrar pasos*

$$175x^2-6000x+120000=89200$$

Restar 89200 de ambos lados

$$175x^2-6000x+120000-89200=89200-89200$$

Simplificar

$$175x^2-6000x+30800=0$$

Resolver con la fórmula general para ecuaciones de segundo grado:

Formula general para ecuaciones de segundo grado: *Ocultar definición*

Para una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$ las soluciones son

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Para $a=175, b=-6000, c=30800$: $x_{1,2}=\frac{-(-6000)\pm\sqrt{(-6000)^2-4\cdot175\cdot30800}}{2\cdot175}$

Mostrar pasos

$$x=\frac{-(-6000)+\sqrt{(-6000)^2-4\cdot175\cdot30800}}{2\cdot175}:\quad 28$$

Mostrar pasos

$$x=\frac{-(-6000)-\sqrt{(-6000)^2-4\cdot175\cdot30800}}{2\cdot175}:\quad \frac{44}{7}$$

Las soluciones a la ecuación de segundo grado son:

$$x=28,\ x=\frac{44}{7}$$

Figura 35
Solución problema d (tercera parte)
Fuente: elaboración propia.

El alambre debe cortarse en x = 28 cm. Queda de tarea para el estudiante, explicar por qué no considerar la otra respuesta (x = 44/7).

Problema e

Se lanza un objeto hacia arriba con un ángulo de 45° y una velocidad inicial v_0 metros por segundo, entonces la altura (en metros) arriba del suelo a una distancia horizontal de x metros desde el punto de lanzamiento está dada por:

$$y=x-\frac{9{,}8}{Vo^2}x^2$$

Si se lanza un proyectil con un ángulo de 45° y una velocidad inicial de 15 m/s. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento aterrizará?

Solución

Reemplazando en la ecuación dada, V_0 = 15, y = 0 se tiene:

$$0=x-\frac{9{,}8}{15^2}x^2$$

y se iguala a cero para representar el hecho de que cuando aterrice el objeto, éste estará a sobre el suelo nuevamente.

Esta ecuación que se ingresa en el Symbolab y se resuelve.

$0 = x - \ 9.8/15^2 \ x^2$

Ir

Gráfica » Ejemplos »

Solución

Resolver con la fórmula general para ecuaciones de segundo grado:

Mostrar pasos

$$0=x-\frac{9.8}{15^2}x^2 \quad : \quad x=0,\ x=\frac{1125}{49}$$

Pasos

$$0=x-\frac{9.8}{15^2}x^2$$

Multiplicar ambos lados por 225

$$0\cdot 225=x\cdot 225-\frac{9.8}{15^2}x^2\cdot 225$$

Simplificar

$$0=225x-\frac{49}{5}x^2$$

Intercambiar lados

$$225x-\frac{49}{5}x^2=0$$

Escribir en la forma binómica $ax^2+bx+c=0$

$$-\frac{49x^2}{5}+225x=0$$

Resolver con la fórmula general para ecuaciones de segundo grado:

Formula general para ecuaciones de segundo grado: *Ocultar definición*

Para una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$ las soluciones son

$$x_{1,\,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Para $a=-\frac{49}{5},\ b=225,\ c=0$: $x_{1,\,2}=\frac{-225\pm\sqrt{225^2-4\left(-\frac{49}{5}\right)0}}{2\left(-\frac{49}{5}\right)}$

$$x=\frac{-225+\sqrt{225^2-4\left(-\frac{49}{5}\right)0}}{2\left(-\frac{49}{5}\right)}:\quad 0$$

Mostrar pasos

$$x=\frac{-225-\sqrt{225^2-4\left(-\frac{49}{5}\right)0}}{2\left(-\frac{49}{5}\right)}:\quad \frac{1125}{49}$$

Mostrar pasos

Las soluciones a la ecuación de segundo grado son:

$$x=0,\ x=\frac{1125}{49}$$

Figura 36
Solución problema e
Fuente: elaboración propia.

En el resultado arrojado por el software, se dan dos soluciones que corresponden justamente a las posiciones en x en las que el objeto está en el suelo: $x = 0$, que es punto de lanzamiento, y el valor $x = 1125/49 = 22,95$ metros que representa la distancia en donde cae el objeto.

CAPÍTULO 2:
Ejercicios de inecuaciones

Ejercicios de inecuaciones

En los siguientes ejercicios, resolver las inecuaciones, expresar la solución en notación de intervalo y trazar la gráfica en recta numérica:

a) $2 + 3x > 0$
b) $-7 < x - 2 < 1$
c) $-2 < \frac{6-\frac{x}{3}}{5} \leq 4$
d) $2(x + 3) \geq 3(x - 1)$
e) $\frac{1}{3} + \frac{5}{3}x \geq \frac{3}{2}x - 2$

Soluciones

Dentro del área de Algebra del Symbolab, se encuentra la opción de Desigualdades: Lineales, cuadráticas, con valor absoluto, con radicales, logarítmicas, exponenciales. Se escoge lineal y se introduce la desigualdad a resolver.

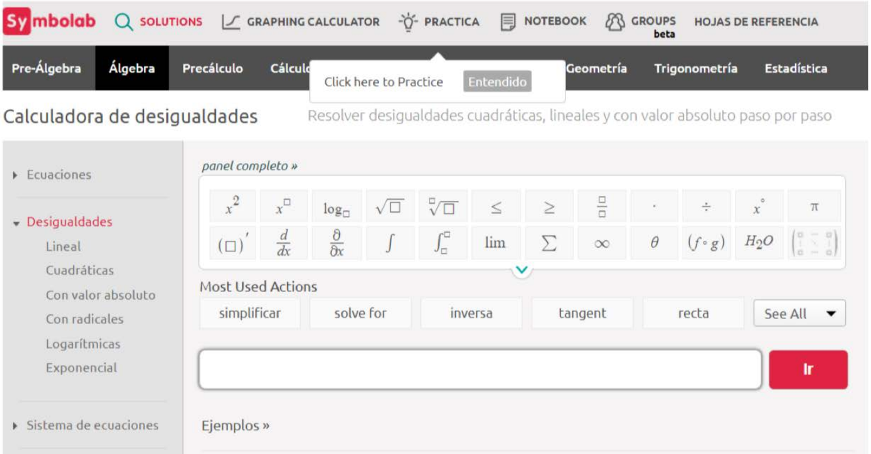


Figura 37
Paso 1 para resolver inecuaciones
Fuente: elaboración propia.

Solución inecuación a

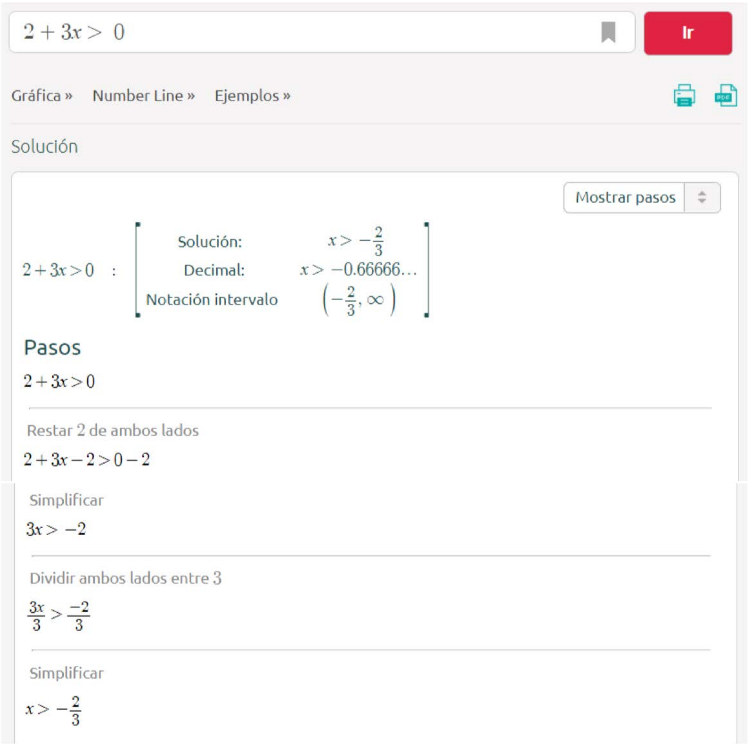


Figura 38
Solución inecuación a
Fuente: elaboración propia.

Se observa que la solución de la inecuación es x > -2/3. Su representación en intervalo es (-2/3, +∞) y su gráfica en la recta numérica se puede ver en la Figura 39.

Figura 39
Representación gráfica inecuación a
Fuente: elaboración propia.

Solución inecuación b

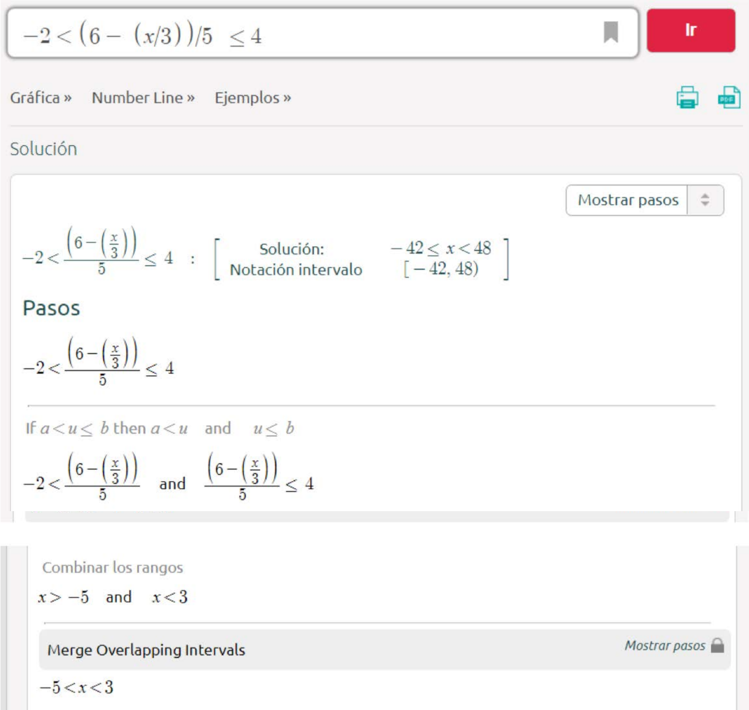


Figura 40
Solución inecuación b
Fuente: elaboración propia.

Se observa que la solución de la inecuación es -5 < x < 3. Su representación en intervalo es (-5,3) y su gráfica en la recta numérica se ve en la Figura 41.

Figura 41
Representación gráfica inecuación b
Fuente: elaboración propia.

Solución inecuación c

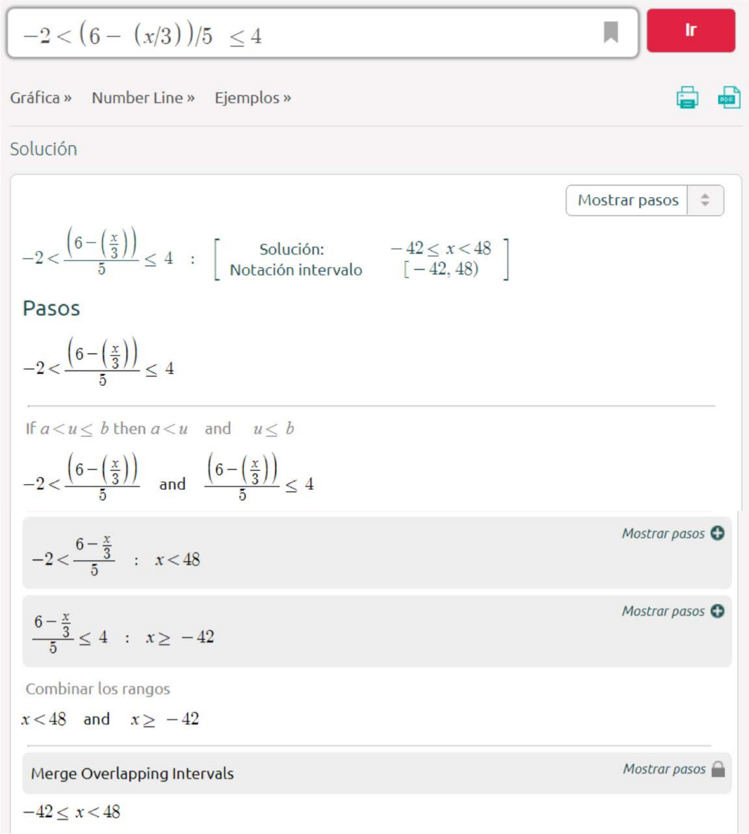


Figura 42
Solución inecuación c
Fuente: elaboración propia.

Se observa que la solución de la inecuación es -42 ≤ x < 48. Su representación en intervalo es [-42, 48) y su gráfica en la recta numérica se puede ver en la Figura 43.

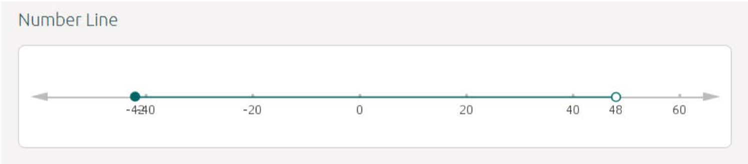


Figura 43
Representación gráfica inecuación c
Fuente: elaboración propia.

Solución inecuación d

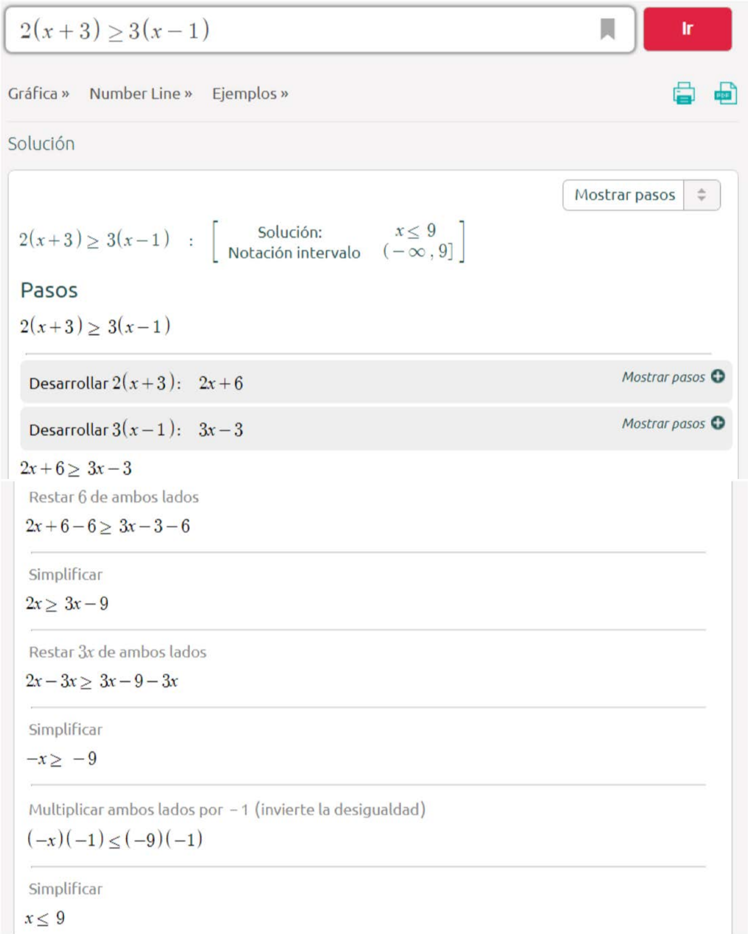


Figura 44
Solución inecuación d
Fuente: elaboración propia.

Se observa que la solución de la inecuación es x ≤ 9. Su representación en intervalo es (-∞, 9) y su gráfica en la recta numérica se ve en la Figura 45.

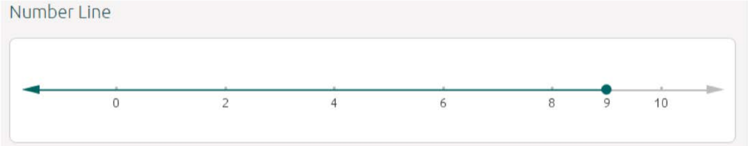


Figura 45
Representación gráfica inecuación d
Fuente: elaboración propia.

Solución inecuación e

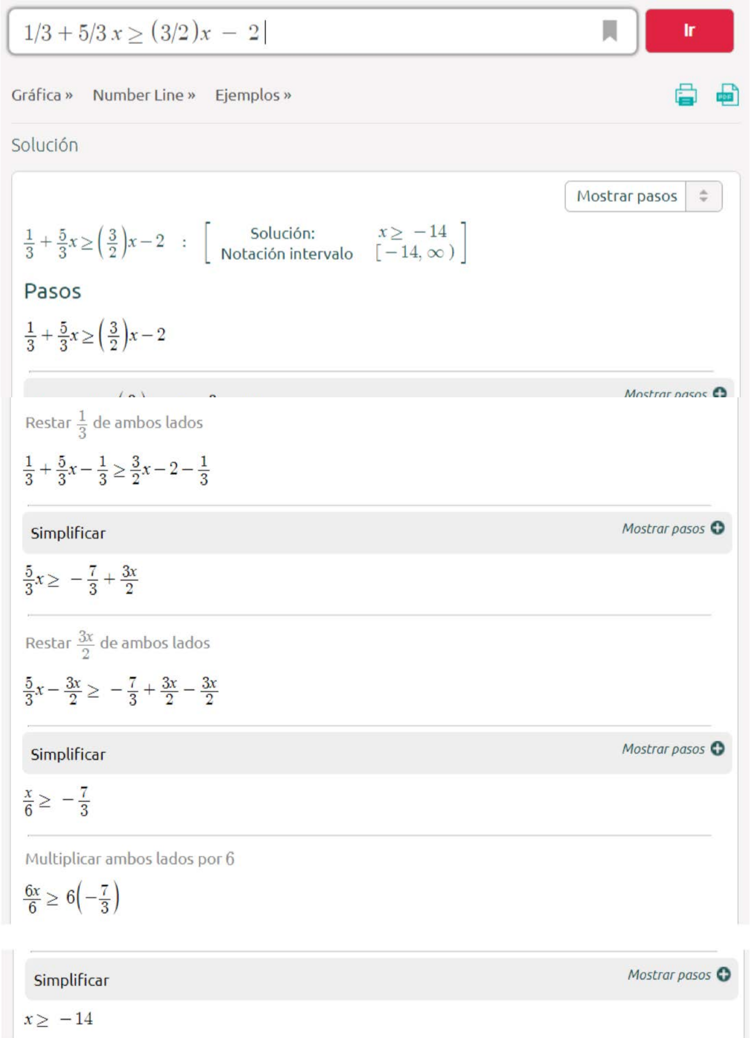


Figura 46
Solución inecuación e
Fuente: elaboración propia.

Se observa que la solución de la inecuación es x ≥ -14. Su representación en intervalo es (-14, +∞) y su gráfica en la recta numérica se muestra en la Figura 47.

Figura 47
Representación gráfica inecuación e
Fuente: elaboración propia.

Problemas con inecuaciones lineales

Resolver los siguientes ejercicios que involucran problemas con inecuaciones lineales.

Problema a

A un tarro de café instantáneo de 4 onzas se le descuentan 50 centavos, y un tarro de 2,5 onzas se vende a US$ 3. ¿A qué precio sería más económico el tarro más grande?

Solución

Sea x el precio que tiene el tarro de café de 4 onzas, por lo que la expresión matemática que representa el valor por onza del mismo es:

$$\frac{x-0{,}5}{4}$$

Además, el precio por onza del tarro pequeño se representa con la fracción:

$$\frac{3}{2{,}5}$$

Ahora, para representar el hecho de ser más económico el tarro más grande, se plantea la siguiente desigualdad, en la que queda de manifiesto que el valor por gramo del tarro de 4 onzas es inferior al valor por gramo del tarro de 2,5 onzas :

$$\frac{x-0{,}5}{4} < \frac{3}{2{,}5}$$

Se ingresa la desigualdad al Symbolab y se resuelve.

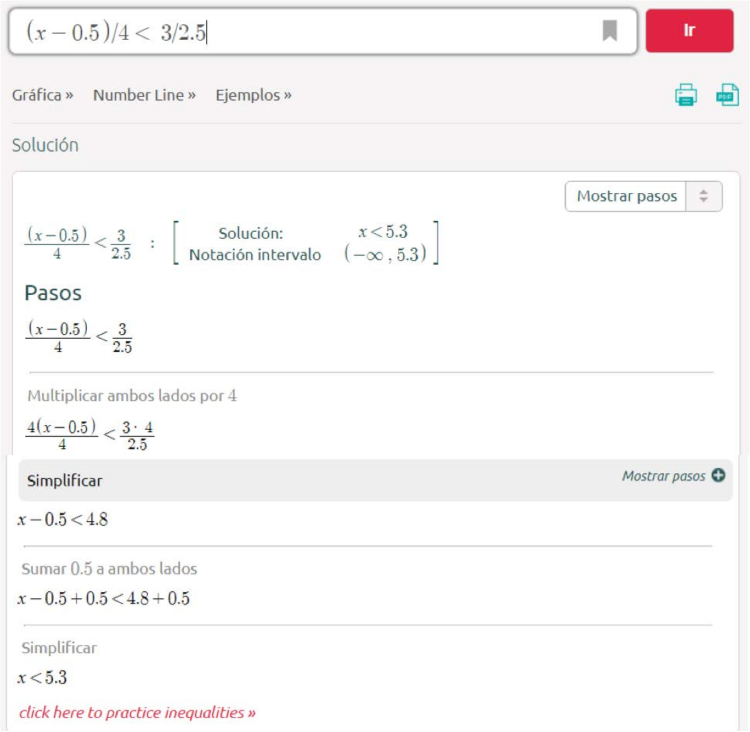


Figura 48
Solución problema con inecuación a (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Se obtiene que el tarro grande (de 4 onzas) debe venderse por debajo de los US$ 5,3.

Problema b

Generalmente se considera que una persona tiene fiebre si presenta una temperatura oral mayor a 37° C. ¿Qué temperatura en la escala Fahrenheit indica fiebre? Recuerde que:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Donde C: grados centígrados, F: grados Fahrenheit.

Solución

La ecuación anterior se desiguala a mayor que 37 y se resuelve.

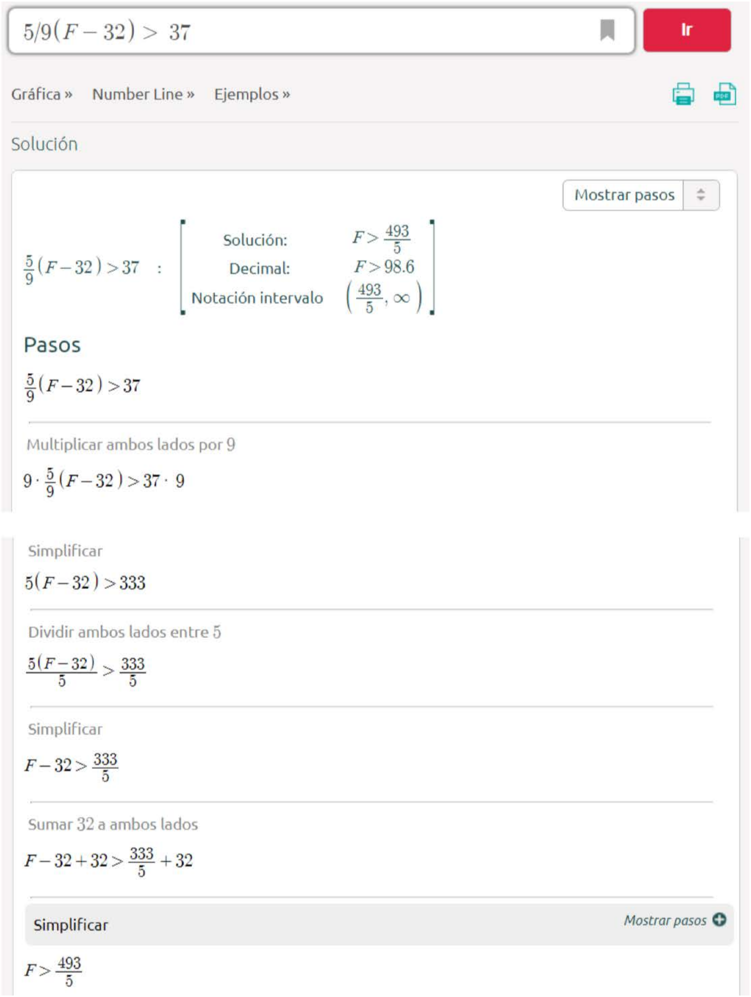


Figura 49
Solución problema con inecuación b
Fuente: elaboración propia.

Se obtiene que la fiebre en la escala Fahrenheit se diagnóstica después de 98,6° F.

Problema c

El administrador de una fábrica debe decidir si deberán producir por sí mismos los empaques que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a US$ 1,10 cada uno. La fabricación de empaques incrementaría los costos generados de la empresa en US$ 1.800 y el costo del material y de la mano de obra será de 90 centavos por cada empaque. ¿Cuántos empaques deberá usar la empresa cada mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?

Solución

Sea x el número de empaques utilizados, es decir:

- 1,10x es lo que le cuesta a la fábrica comprarlos a proveedor externo.
- 0,9x + 1800 es lo que le cuesta a la fábrica producirlos por sí misma.

Con ello, es claro que se debe plantear una inecuación en la que el costo de producirlos por sí misma sea menor que el costo de comprarlos a un proveedor externo.

$$0{,}9x + 1800 < 1{,}10x$$

Se introduce esta desigualdad en el Symbolab y se resuelve.

Solución

Mostrar pasos

$0.9x+1800<1.1x \quad : \quad \begin{bmatrix} \text{Solución:} & x>9000 \\ \text{Notación intervalo} & (9000, \infty) \end{bmatrix}$

Pasos

$0.9x+1800<1.1x$

Multiplicar ambos lados por 10

$0.9x\cdot 10+1800\cdot 10<1.1x\cdot 10$

Simplificar

$9x+18000<11x$

Restar 18000 de ambos lados

$9x+18000-18000<11x-18000$

Simplificar

$9x<11x-18000$

Restar $11x$ de ambos lados

$9x-11x<11x-18000-11x$

Simplificar

$-2x<-18000$

Multiplicar ambos lados por -1 (invierte la desigualdad)

$(-2x)(-1)>(-18000)(-1)$

Simplificar

$2x>18000$

Dividir ambos lados entre 2

$\frac{2x}{2}>\frac{18000}{2}$

Figura 50
Solución problema con inecuación c
Fuente: elaboración propia.

Con este resultado se concluye que la empresa debe utilizar más de 9000 empaques para que resulte rentable producirlas por sí misma.

Inecuaciones cuadráticas

Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 - 2x - 15 > 0$
b) $6x^2 - 14x + 4 \geq 0$
c) $-9x > 2x^2 - 18$
d) $12x^2 > 27x + 27$
e) $\frac{3x-2}{2x+5} \geq -2$

Soluciones

Se elige la opción de solución de desigualdades cuadráticas en el Symbolab.

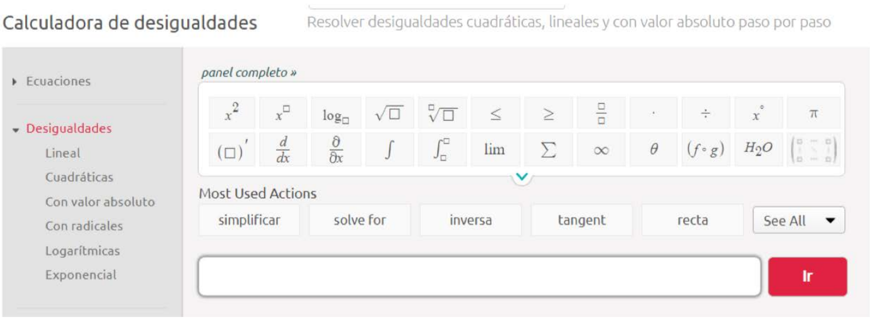


Figura 51
Pasos para resolver desigualdades cuadráticas
Fuente: elaboración propia.

Y se introduce cada inecuación a resolver.

Solución inecuación cuadrática a

Solución

Mostrar pasos

$x^2-2x-15>0$: $\left[\begin{array}{ll} \text{Solución:} & x<-3 \quad \text{or} \quad x>5 \\ \text{Notación intervalo} & (-\infty,-3)\cup(5,\infty) \end{array}\right]$

Pasos

$x^2-2x-15>0$

Factorizar $x^2-2x-15$: $(x+3)(x-5)$ Mostrar pasos

$(x+3)(x-5)>0$

Calcular los signos de los factores de $(x+3)(x-5)$

Calcular los signos para $x+3$ Mostrar pasos

Calcular los signos para $x-5$ Mostrar pasos

Resumir en una tabla:

	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<5$	$x=5$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	0
$(x+3)(x-5)$	$+$	0	$-$	0

Escoger los rangos que satisfacen la condición solicitada: >0

$x<-3$ or $x>5$

Figura 52
Solución inecuación cuadrática a (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Obsérvese que se obtiene como solución de la inecuación cuadrática:

$$x<-3 \vee x>5$$

Figura 53
Solución inecuación cuadrática a (segunda parte)
Fuente: elaboración propia.

Solución inecuación cuadrática b

Solución

Mostrar pasos

$6x^2-14x+4\geq 0 \quad : \quad \begin{bmatrix} \text{Solución:} & x\leq \frac{1}{3} \quad \text{or} \quad x\geq 2 \\ \text{Decimal:} & x\leq 0.33333\ldots \quad \text{or} \quad x\geq 2 \\ \text{Notación intervalo} & \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [2, \infty) \end{bmatrix}$

Pasos

$6x^2-14x+4\geq 0$

Dividir ambos lados entre 2

$\frac{6x^2}{2}-\frac{14x}{2}+\frac{4}{2}\geq\frac{0}{2}$

Simplificar

$3x^2-7x+2\geq 0$

Factorizar $3x^2-7x+2$: $(3x-1)(x-2)$ — Mostrar pasos

$(3x-1)(x-2)\geq 0$

Calcular los signos de los factores de $(3x-1)(x-2)$

Calcular los signos para $3x-1$ — Mostrar pasos

Calcular los signos para $x-2$ — Mostrar pasos

Resumir en una tabla:

	$x<\frac{1}{3}$	$x=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<2$	$x=2$
$3x-1$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0
$(3x-1)(x-2)$	$+$	0	$-$	0

Escoger los rangos que satisfacen la condición solicitada: ≥ 0

$x<\frac{1}{3} \quad \text{or} \quad x=\frac{1}{3} \quad \text{or} \quad x=2 \quad \text{or} \quad x>2$

Figura 54
Solución inecuación cuadrática b (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Obsérvese que se obtiene como solución de la inecuación cuadrática:

$$x\leq\frac{1}{3} \;\; v \;\; x\geq 2$$

Figura 55
Solución inecuación cuadrática b (segunda parte)
Fuente: elaboración propia.

Solución inecuación cuadrática c

Solución

Mostrar pasos

$$-9x > 2x^2 - 18 \quad : \quad \begin{bmatrix} \text{Solución:} & -6 < x < \frac{3}{2} \\ \text{Decimal:} & -6 < x < 1.5 \\ \text{Notación intervalo} & \left(-6, \frac{3}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Pasos

$-9x > 2x^2 - 18$

Sumar 18 a ambos lados

$-9x + 18 > 2x^2 - 18 + 18$

Simplificar

$-9x + 18 > 2x^2$

Restar $2x^2$ de ambos lados

$-9x + 18 - 2x^2 > 2x^2 - 2x^2$

Simplificar

$-9x + 18 - 2x^2 > 0$

Factorizar $-9x + 18 - 2x^2$: $\quad -(2x-3)(x+6)$ *Mostrar pasos*

$-(2x-3)(x+6) > 0$

Multiply both sides by -1 (reverse the inequality)

$(-(2x-3)(x+6))(-1) < 0 \cdot (-1)$

Simplificar

$(2x-3)(x+6) < 0$

Calcular los signos de los factores de $(2x-3)(x+6)$

Calcular los signos para $2x-3$ *Mostrar pasos*

Calcular los signos para $x+6$ *Mostrar pasos*

Resumir en una tabla:

	$x<-6$	$x=-6$	$-6<x<\frac{3}{2}$	$x=\frac{3}{2}$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0
$x+6$	$-$	0	$+$	$+$
$(2x-3)(x+6)$	$+$	0	$-$	0

Escoger los rangos que satisfacen la condición solicitada: <0

$-6<x<\frac{3}{2}$

Number Line

Figura 56
Solución inecuación cuadrática c
Fuente: elaboración propia.

Obsérvese que se obtiene como solución de la inecuación cuadrática:

$$-6 < x < 3/2$$

Solución inecuación cuadrática d

Solución

Mostrar pasos

$12x^2>27x+27$:

Solución:	$x<-\frac{3}{4}$ or $x>3$
Decimal:	$x<-0.75$ or $x>3$
Notación intervalo	$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup(3,\infty)$

Pasos

$12x^2>27x+27$

Restar 27 de ambos lados

$12x^2-27>27x+27-27$

Simplificar

$12x^2-27>27x$

Restar $27x$ de ambos lados

$12x^2-27-27x>27x-27x$

Simplificar

$12x^2-27-27x>0$

Dividir ambos lados entre 3

$$\frac{12x^2}{3}-\frac{27}{3}-\frac{27x}{3}>\frac{0}{3}$$

Simplificar $\frac{12x^2}{3}-\frac{27}{3}-\frac{27x}{3}>\frac{0}{3}$: $4x^2-9x-9>0$ Mostrar pasos

$$4x^2-9x-9>0$$

Factorizar $4x^2-9x-9$: $(4x+3)(x-3)$ Mostrar pasos

$$(4x+3)(x-3)>0$$

Calcular los signos de los factores de $(4x+3)(x-3)$

Calcular los signos para $4x+3$ Mostrar pasos

Calcular los signos para $x-3$ Mostrar pasos

Resumir en una tabla:

	$x<-\frac{3}{4}$	$x=-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}<x<3$	$x=3$
$4x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0
$(4x+3)(x-3)$	$+$	0	$-$	0

Escoger los rangos que satisfacen la condición solicitada: >0

$x<-\frac{3}{4}$ or $x>3$

Figura 57
Solución inecuación cuadrática d
Fuente: elaboración propia.

Obsérvese que se obtiene como solución de la inecuación cuadrática:

$$x < -3/4 \lor x > 3$$

Solución inecuación cuadrática e

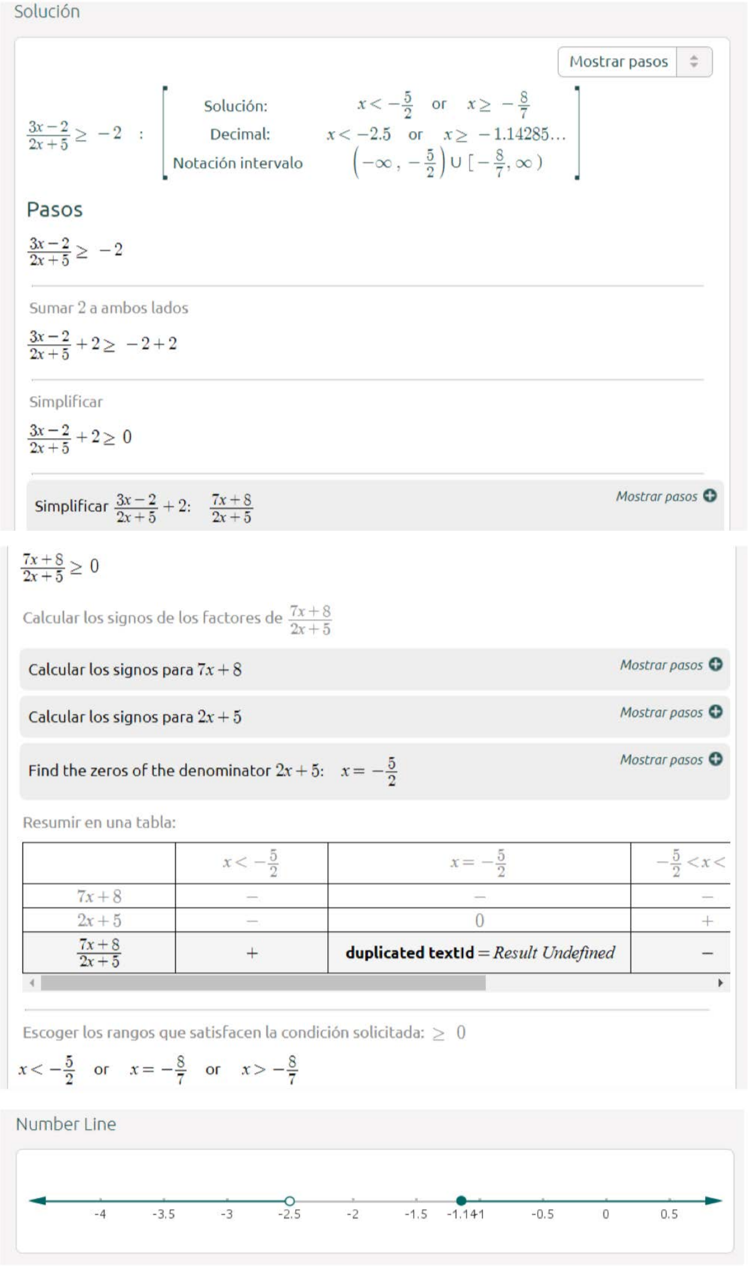


Figura 58
Solución inecuación cuadrática e
Fuente: elaboración propia.

Obsérvese que se obtiene como solución de la inecuación cuadrática:

$$x < -\frac{5}{2} \quad v \quad x \geq \frac{8}{7}$$

Problemas con inecuaciones cuadráticas

Resolver los siguientes ejercicios que involucran problemas con inecuaciones cuadráticas.

Problema a

Los lados de un cuadrado se extienden para formar un rectángulo. Como lo muestra la figura, un lado se extiende 2 cm y el otro 5 cm. Si el área del rectángulo resultante es menor de $130cm^2$, ¿cuáles son las posibles longitudes del lado del cuadrado original?

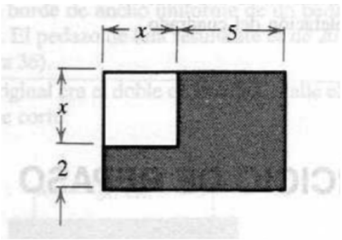


Figura 59
Cuadrado a rectángulo
Fuente: Zill y Dewar (2000).

Problema b

La intensidad I en lúmenes de cierta fuente de luz en un punto a r centímetros de la fuente está dada por:

$$I = \frac{625}{r^2}$$

¿A qué distancia de la fuente de luz, la intensidad será menor que 25 lúmenes?

Problema c

Récord de salto vertical. El Libro Guiness de récords mundiales informa que los perros pastores alemanes pueden dar saltos verticales de más de 10 pies cuando escalan paredes. Si la distancia s (en pies) desde el suelo después de t segundos está dada por la ecuación

$$s = -16t^2 + 24 + 1$$

¿Durante cuántos segundos está el perro a más de 9 pies del suelo? Ejercicio adaptado de Zill y Dewar (2000).

Problema d

Peso en el espacio. Después de que un astronauta es lanzado al espacio, su peso disminuye hasta alcanzar un estado de ingravidez. El peso de un astronauta de 125 libras a una altitud de x kilómetros sobre el nivel del mar está dado por:

$$w = 125\left(\frac{6400}{6400 + x}\right)^2$$

¿A qué altitudes el peso del astronauta es menor que 5 libras?

Soluciones

Solución problema a

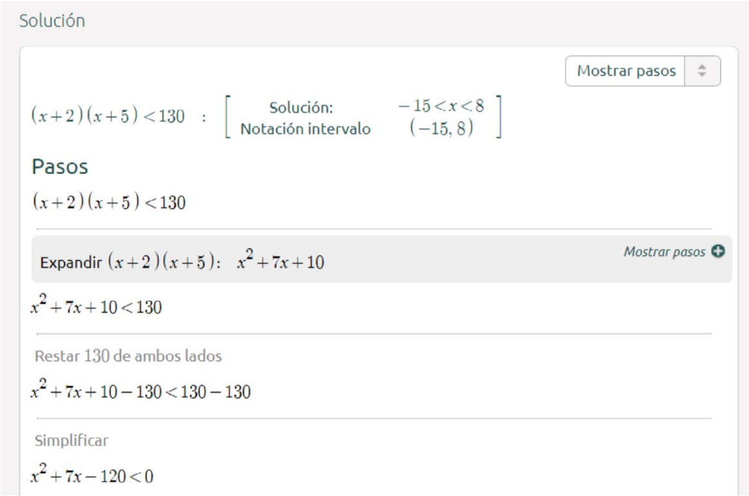
Se debe calcular el área del rectángulo resultante. Con los datos que enseña la figura, se tiene que

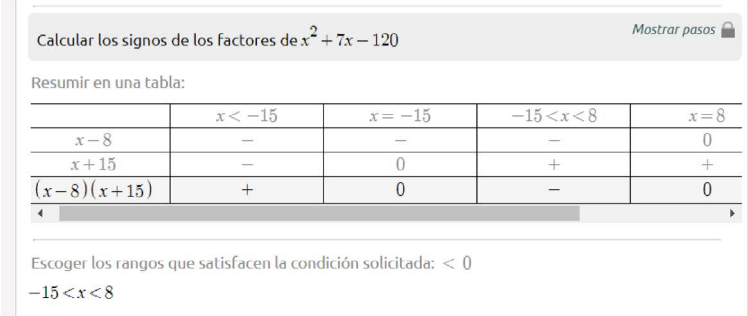
Área rectángulo resultante = $(x + 2)(x + 5)$

Ahora, según el enunciado, esta área es menor a 130, por lo que se desiguala a este valor y se resuelve para hallar x:

$$(x + 2)(x + 5) < 130$$

Se introduce la desigualdad al Symblab:





Calcular los signos de los factores de $x^2+7x-120$ Mostrar pasos

Resumir en una tabla:

	$x<-15$	$x=-15$	$-15<x<8$	$x=8$
$x-8$	$-$	$-$	$-$	0
$x+15$	$-$	0	$+$	$+$
$(x-8)(x+15)$	$+$	0	$-$	0

Escoger los rangos que satisfacen la condición solicitada: <0

$-15<x<8$

Figura 60
Solución problema a
Fuente: elaboración propia.

Si bien la solución de la inecuación es -15< x <8, se concluye que los posibles valores del lado del cuadrado original estarían en el intervalo (0,8), considerando la longitud como un valor positivo. De hecho, se puede comprobar numéricamente:

$$(8+2)(8+5) \leq 130$$

Teniendo en consideración la ecuación dada, y considerando que la intensidad sea menor a 25 lúmenes se tiene:

$$\frac{625}{r^2} < 25$$

Resolviendo esta inecuación en Symbolab, se tiene que:

$625/r^2 < 25$ Ir

Gráfica » Number Line » Ejemplos »

Solución

Mostrar pasos

$\frac{625}{r^2}<25$: Solución: $r<-5$ or $r>5$; Notación intervalo $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$

Pasos

$\frac{625}{r^2}<25$

Restar 25 de ambos lados

$\frac{625}{r^2}-25<25-25$

Simplificar

$$\frac{625}{r^2} - 25 < 0$$

Simplificar $\frac{625}{r^2} - 25$: $\frac{625 - 25r^2}{r^2}$ Mostrar pasos

$$\frac{625 - 25r^2}{r^2} < 0$$

Calcular los signos de los factores de $\frac{625 - 25r^2}{r^2}$ Mostrar pasos

Resumir en una tabla:

	$r < -5$	$r = -5$	$-5 < r < 0$	
$r+5$	$-$	0	$+$	
$r-5$	$-$	$-$	$-$	
r^2	$+$	$+$	$+$	
$-25 + \frac{625}{r^2}$	$-$	0	$+$	**duplicated**

Escoger los rangos que satisfacen la condición solicitada: < 0

$r < -5$ or $r > 5$

Figura 61
Solución problema a
Fuente: elaboración propia.

Considerando la desigualdad positiva, se concluye que para una distancia superior a los 5 metros se tienen intensidades inferiores a 25 lúmenes.

Solución problema b

Se toma la ecuación de la posición vertical y se desiguala a mayor que 9 pies.

$$-16t^2 + 24 + 1 > 9$$

Se resuelve esta inecuación para encontrar el intervalo de tiempo pedido:

$-16t^2 + 24 + 1 > 9$ Ir

Gráfica » Number Line » Ejemplos »

Solución

Mostrar pasos

$-16t^2 + 24 + 1 > 9$: Solución: $-1 < t < 1$; Notación intervalo: $(-1, 1)$

Pasos

$$-16t^2+24+1>9$$

Sumar: $24+1=25$

$$-16t^2+25>9$$

Restar 25 de ambos lados

$$-16t^2+25-25>9-25$$

Simplificar

$$-16t^2>-16$$

Multiplicar ambos lados por -1 (invierte la desigualdad)

$$(-16t^2)(-1)<(-16)(-1)$$

Simplificar

$$16t^2<16$$

Dividir ambos lados entre 16

$$\frac{16t^2}{16}<\frac{16}{16}$$

Simplificar

$$t^2<1$$

For $u^n < a$, if n is even then $-\sqrt[n]{a} < u < \sqrt[n]{a}$

$$-1<t<1$$

Figura 62
Solución problema b
Fuente: elaboración propia.

Considerando el intervalo de tiempo positivo, el perro se encontraría por encima de los 9 metros durante un 1 segundo.

Solución problema c

La ecuación del peso del astronauta se desiguala a menor que 5 libras y se resuelve.

$125(6400/(6400+x))^2 < 5$ Ir

Gráfica » Number Line » Ejemplos »

Solución

Mostrar pasos

$$125\left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2<5 \quad : \quad \begin{bmatrix} \text{Solución:} & x<-38400 \quad \text{or} \quad x>25600 \\ \text{Notación intervalo} & (-\infty, -38400)\cup(25600, \infty) \end{bmatrix}$$

Pasos

$$125\left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2<5$$

Dividir ambos lados entre 125

$$\frac{125\left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2}{125}<\frac{5}{125}$$

Simplificar

$$\left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2<\frac{1}{25}$$

For $u^n<a$, if n is even then $-\sqrt[n]{a}<u<\sqrt[n]{a}$

$$-\sqrt{\frac{1}{25}}<\frac{6400}{6400+x}<\sqrt{\frac{1}{25}}$$

If $a<u<b$ then $a<u$ and $u<b$

$$-\sqrt{\frac{1}{25}}<\frac{6400}{6400+x} \quad \text{and} \quad \frac{6400}{6400+x}<\sqrt{\frac{1}{25}}$$

Mostrar pasos

$$-\sqrt{\frac{1}{25}}<\frac{6400}{6400+x} \quad : \quad x<-38400 \quad \text{or} \quad x>-6400$$

Mostrar pasos

$$\frac{6400}{6400+x}<\sqrt{\frac{1}{25}} \quad : \quad x<-6400 \quad \text{or} \quad x>25600$$

Combinar los rangos

$$(x<-38400 \quad \text{or} \quad x>-6400) \quad \text{and} \quad (x<-6400 \quad \text{or} \quad x>25600)$$

Merge Overlapping Intervals

Mostrar pasos

$$x<-38400 \quad \text{or} \quad x>25600$$

Figura 63
Solución problema c
Fuente: elaboración propia.

Se observa que se obtienen matemáticamente dos intervalos, uno negativo y otro positivo. Se toma el positivo pues la altura e una medida positiva. Con ello, respondiendo a la pregunta del problema, se dice que para alturas superiores a 25.600 km, el astronauta pesa menos de 5 libras.

CAPÍTULO 3:
Ejercicios de geometría

Para la realización de estos ejercicios que involucran problemas geométricos se usa la herramienta *Geogebra*, que permite hacer representaciones gráficas en R2 (plano) y R3(espacio).

Ejercicio 1

Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo en el que los catetos miden 15 m y 20 m.

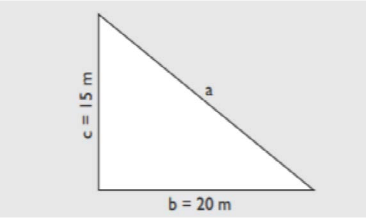


Figura 64
Triángulo rectángulo
Fuente: elaboración propia.

Ejercicio 2

Un campo de fútbol mide de largo 105 m y de ancho 65 m. Queremos reponer el césped, que cuesta 25 €/m2. ¿Cuánto tenemos que pagar?

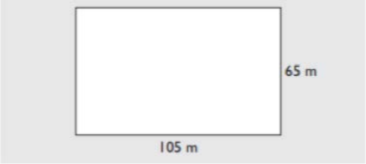


Figura 65
Campo de fútbol
Fuente: elaboración propia.

Ejercicio 3

Calcula el área de una corona circular cuyos diámetros miden 12 cm y 16 cm.

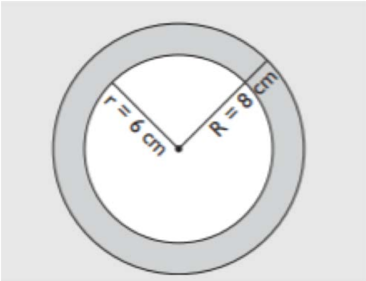


Figura 66
Corona circular
Fuente: elaboración propia.

Ejercicio 4

Las ruedas delanteras de un tractor miden 70 cm de diámetro, y las traseras, 1,5 m. Si el tractor recorre 25 km, ¿cuántas vueltas habrán dado las ruedas delanteras?, ¿y las traseras?

Ejercicio 5

La vela de un barco es de lona y tiene forma de triángulo rectángulo; sus catetos miden 10 m y 18 m. El metro cuadrado de lona vale 18,5 €. ¿Cuánto cuesta la lona para hacer la vela?

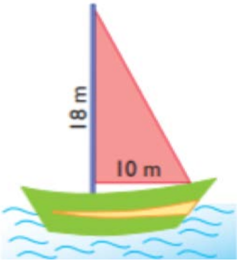


Figura 67
Barco
Fuente: elaboración propia.

Soluciones

En primera instancia, se accede al software matemático en la web Geogebra cuya dirección electrónica es: https://www.geogebra.org/

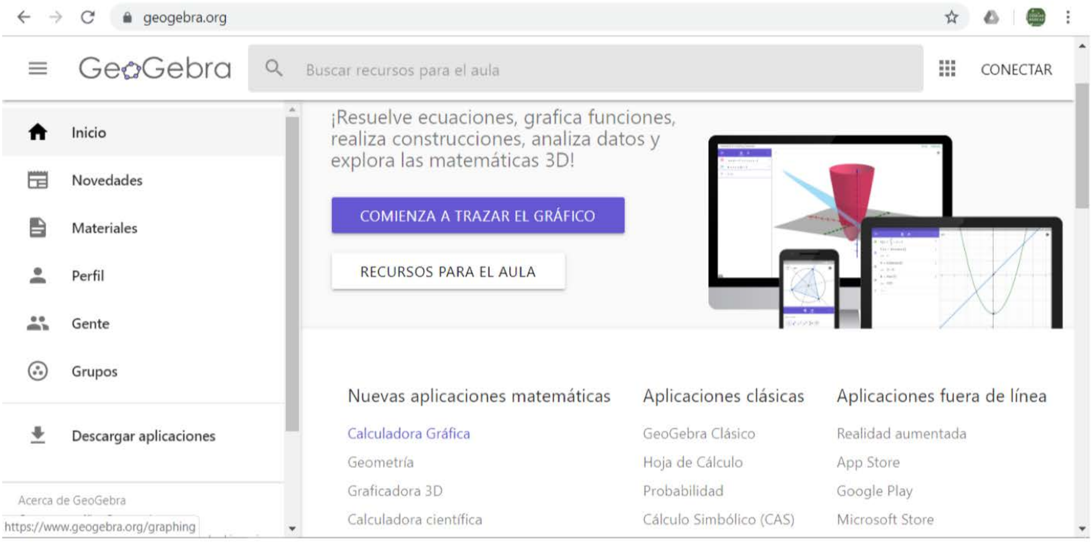


Figura 68
Paso 1 Geogebra
Fuente: elaboración propia.

Esta herramienta nos permite trabajar en diferentes aplicaciones de la matemática y la estadística como:

- Geometría
- Probabilidad
- Cálculo simbólico
- Graficación en 2D y en 3D
- Hoja de cálculo.

Para la solución de los problemas de geometría que se resuelven en esta sección, se hará uso de la Calculadora gráfica, la cual tiene múltiples funcionalidades: resuelve ecuaciones, expande y factoriza expresiones, encuentra derivadas e integrales, trabaja con variables indefinidas. Y hace análisis de funciones: raíces, mínimos, máximos, intersecciones, crea tablas de valores para funciones, realiza ajustes de curvas por regresión y más.

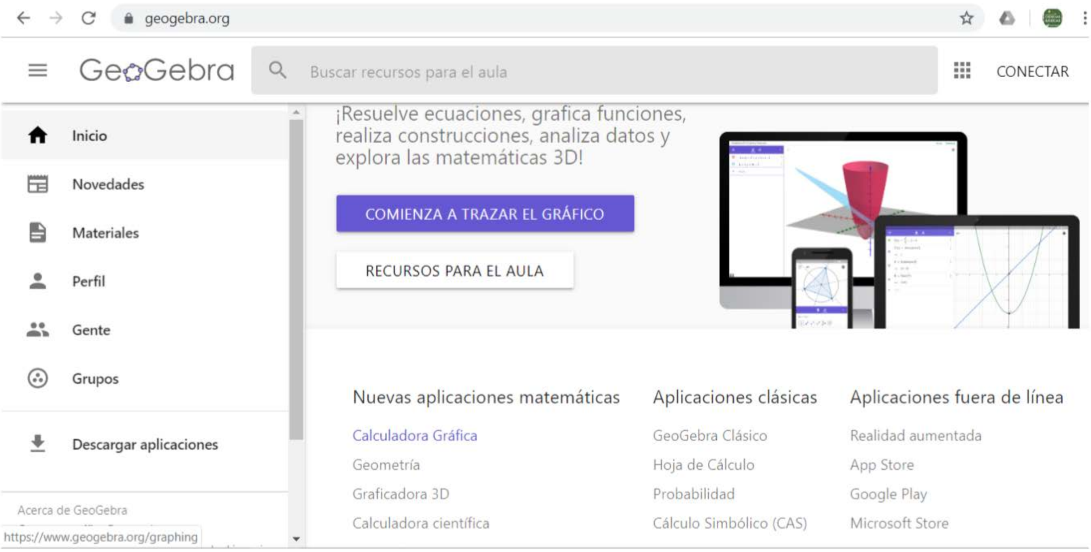


Figura 69
Paso 2 Geogebra
Fuente: elaboración propia.

Dentro de la misma, se selecciona la opción Herramientas:

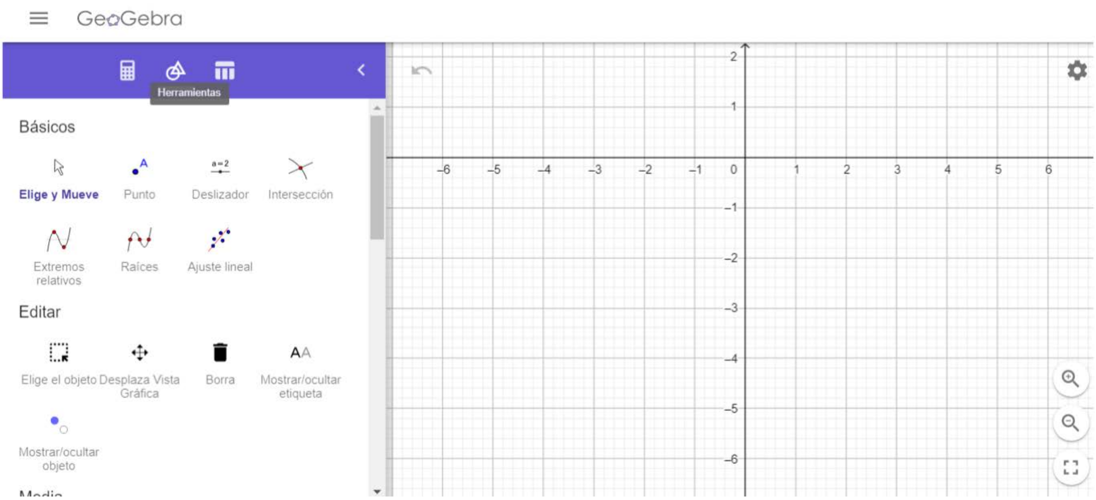


Figura 70
Paso 3 Geogebra
Fuente: elaboración propia.

En esta opción, aparecen las siguientes herramientas.

- Básicas
- Edición
- Ángulos y medidas
- Transformaciones
- Construcciones
- Rectas
- Polígonos
- Círculos
- Cónicas

Solución ejercicio 1

Tal como plantea este ejercicio, se construye para ello un triángulo rectángulo con catetos de 15 y 20 unidades. Dentro de la herramienta *Rectas*, se selecciona *Segmento*, que permite construir el triángulo descrito sobre el plano cartesiano:

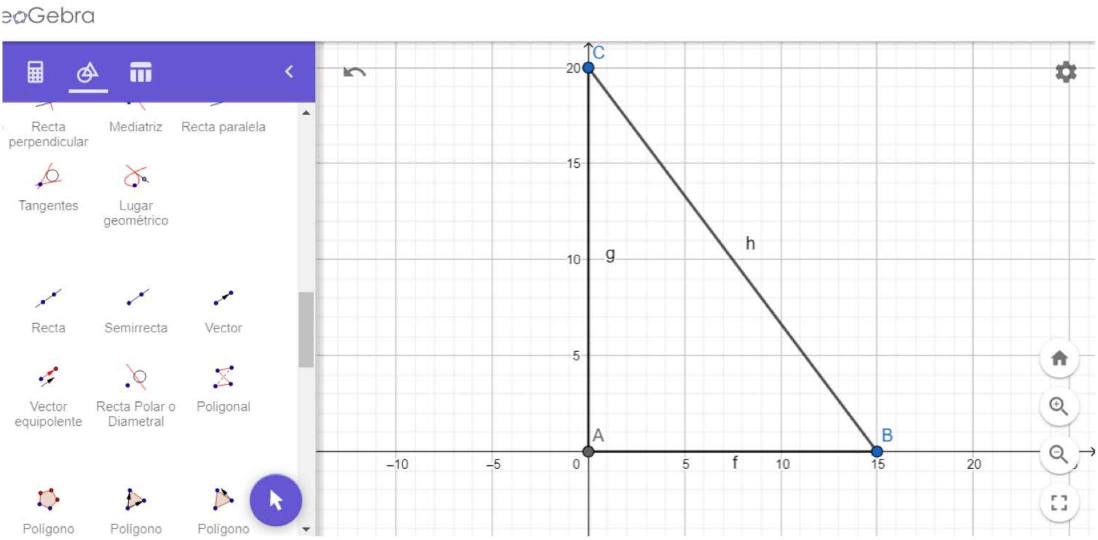


Figura 71
Solución ejercicio 1 (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Ahora, dentro de la herramienta *Ángulos y medidas*, se selecciona *Distancia o longitud* con la que se corroboran las dimensiones del triángulo recién construido, entre los puntos ABC:

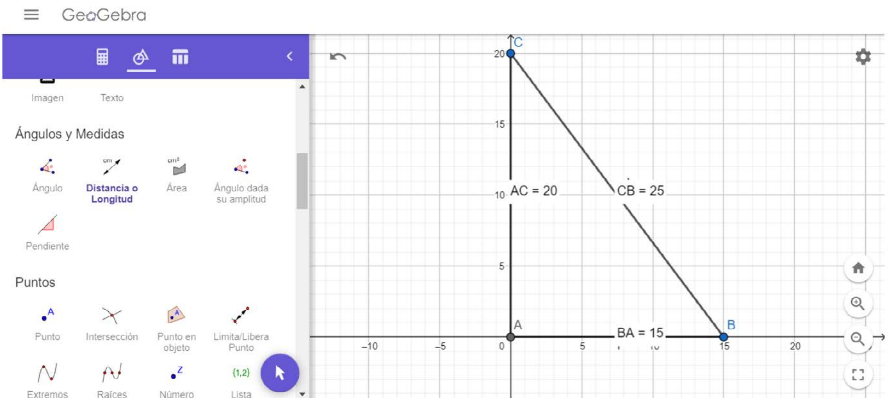


Figura 72
Solución ejercicio 1 (segunda parte)
Fuente: elaboración propia.

Según la imagen anterior, queda establecido efectivamente el triángulo rectángulo con catetos de 15 y 20 unidades (segmentos de recta AB y AC, respectivamente). Además, se calcula de forma gráfica el valor de su hipotenusa (segmento CB), es decir, 25 unidades. Se invita al estudiante a constatar este resultado con el cálculo matemático a través del Teorema de Pitágoras.

Finalmente, el ejercicio solicita el valor del perímetro, por lo que para ello se suman todos los tres lados del triángulo: 15 + 20 + 25, y se obtiene un valor de 60 unidades.

Solución ejercicio 2

En este ejercicio se procede a construir un rectángulo con dimensiones 105 x 65:

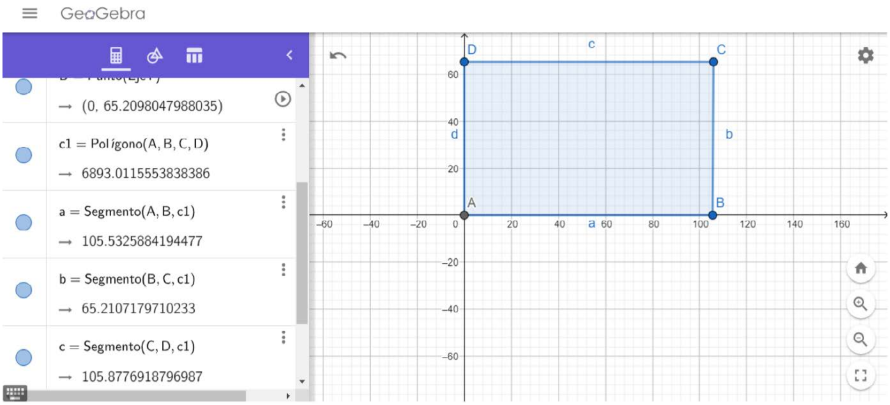


Figura 73
Solución ejercicio 2 (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Ahora, en la opción de herramientas se selecciona la opción *Área*.

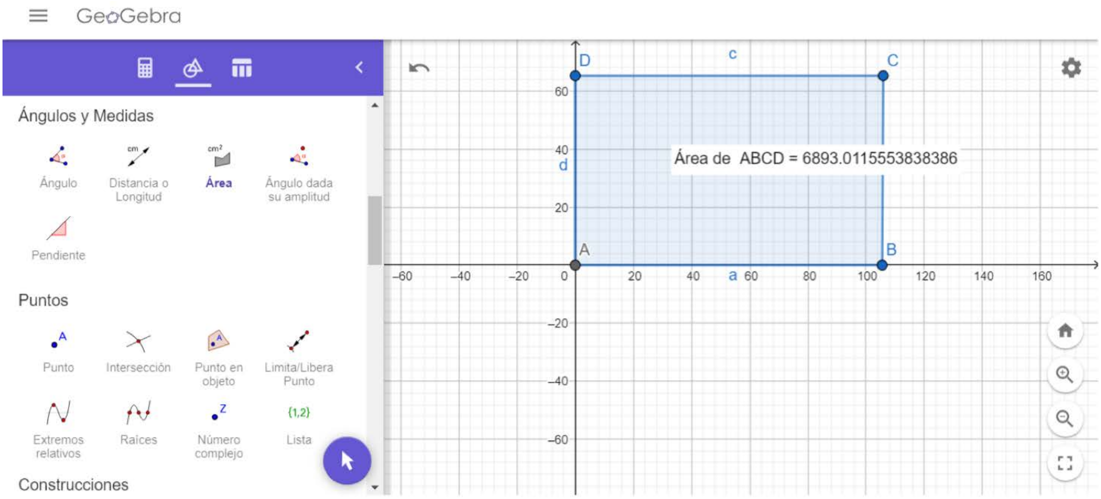


Figura 74
Solución ejercicio 2 (segunda parte)
Fuente: elaboración propia.

Entrega como resultado el área del rectángulo analizado: 6893,01 m^2. Se invita al estudiante a hacer el cálculo matemático respectivo de acuerdo con el área de un rectángulo y constatar la respuesta.

Ahora, esta área obtenida se multiplica por el valor del metro cuadrado de césped, para obtener el valor total de la obra:

$$6893{,}01\, m\, x\, \frac{25€}{m2} = €\ 172.325{,}25$$

La obra tiene un costo de € 172.325,25

Solución ejercicio 3

Dentro de la opción *Círculos*, se selecciona *Circunferencia (centro, radio)* con la que se trazan dos circunferencias concéntricas de 6 y 8 cm de radio:

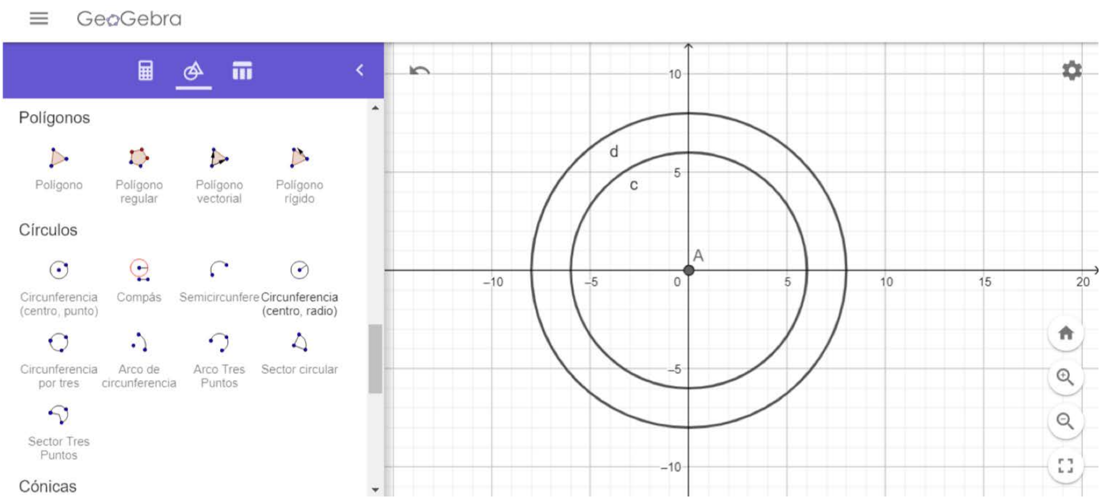


Figura 75
Solución ejercicio 3 (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Ahora, en la opción de herramientas se selecciona la opción *Área*, con la que se mide el área del círculo mayor y el área del círculo menor:

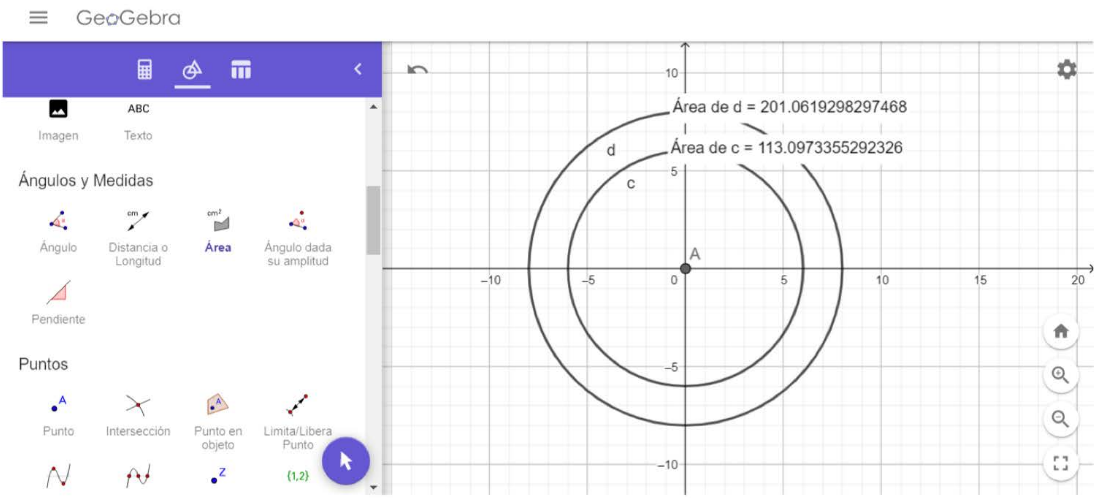


Figura 76
Solución ejercicio 3 (segunda parte)
Fuente: elaboración propia.

La diferencia de los dos valores, da el área de la corona:

201,06 – 113,09 = 87,97cm

Se invita al estudiante a hacer el cálculo matemático de las áreas de los dos círculos y constatar esta respuesta.

Solución ejercicio 4

Silas ruedas delanteras de 70 cm de diámetro, tienen 35 cm de radio, lo que equivale a 0,35m. Las ruedas traseras tienen un diámetro de 1,5 m, o sea un radio de 0,75 m. Se procede a graficar en el Geogebra dos circunferencias con estas dimensiones (0,35 y 0,75).

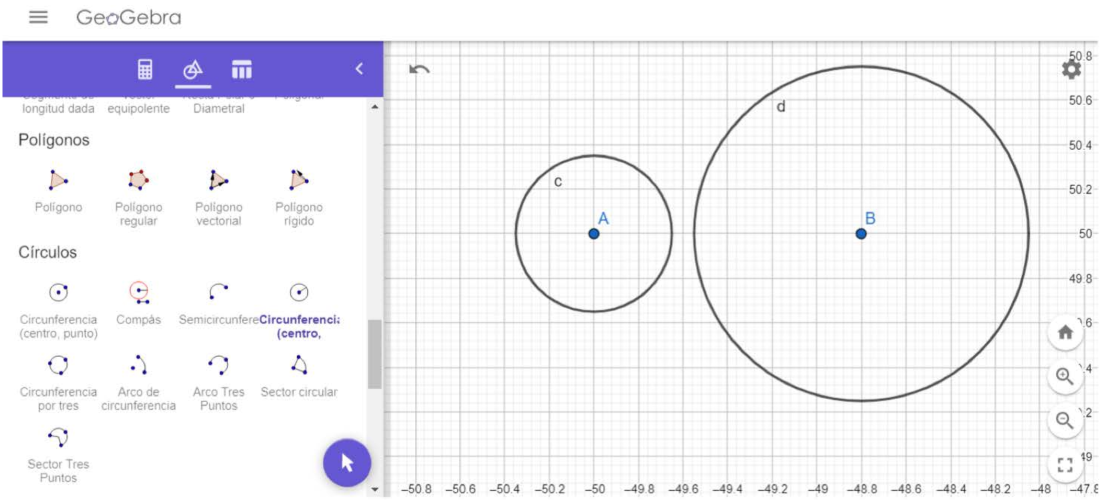


Figura 77
Solución ejercicio 4 (primera parte)
Fuente: elaboración propia.

Se procede ahora a medir las longitudes de las circunferencias construidas con la opción *Distancia o longitud.*

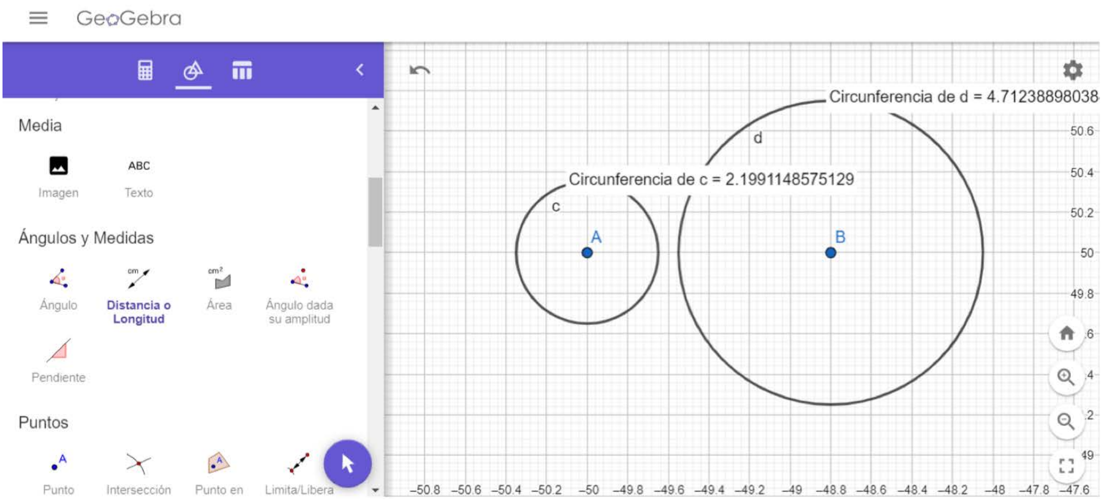


Figura 78
Solución ejercicio 4 (segunda parte)
Fuente: elaboración propia.

Se obtienen como resultado, 2,19 m y 4,71 m. Se invita al estudiante a hacer el cálculo matemático con fórmula de estas longitudes y constatar con la respuesta.

Ahora, la distancia recorrida es de 25 km que equivalen a 25.000 m. Este valor se divide entre cada una de las longitudes encontradas, para determinar así el número de vueltas de cada rueda:

$$\frac{25000}{2{,}19} = 11.415{,}52\ \textit{vueltas de la rueda pequeña}$$

$$\frac{25000}{4{,}71} = 5307{,}85\ \textit{vueltas de la rueda grande}$$

CAPÍTULO 4:
Ejercicios propuestos

Una vez estudiados los apartados anteriores, se invita a los estudiantes a resolver los siguientes problemas haciendo uso de las herramientas Geogebra y Symbolab. Todos los ejercicios son elaborados a partir de los ejercicios planteados en el libro *Algebra y Trigonometría con Geometría analítica* (Swokowski y Cole, 2011).

1. Un estudiante de álgebra ha ganado $ 500.000 en una lotería y desea depositarlos en cuentas de ahorros en dos instituciones financieras. Una cuenta paga 4 % de interés simple, pero los depósitos se aseguran sólo hasta $ 250.000. La segunda cuenta paga 3,2 % de interés simple y los depósitos se aseguran hasta $ 500.000. Determine si el dinero se puede depositar para que quede completamente asegurado y gane un interés anual de $ 18.500

2. Seiscientas personas asistieron al estreno de una película. Los boletos para adultos costaron $ 9 y la admisión de niños fue de $ 6. Si los recibos de la taquilla totalizaron $ 4800, ¿cuántos niños asistieron al estreno?

3. En cierto examen médico diseñado para medir la tolerancia a los carbohidratos, un adulto bebe 7 onzas de una solución de glucosa al 30 %. Cuando el examen se administra a un niño, la concentración de glucosa debe reducirse al 20 %. ¿Cuánta solución de glucosa al 30 % y cuánta agua debe usarse para preparar 7 onzas de solución de glucosa al 20 %?

4. La teofilina, medicamento para el asma, se ha de preparar de un elíxir con una concentración de teofilina de 5 mg/mL y un jarabe con sabor a cereza que se ha de agregar para ocultar el sabor del medicamento. ¿Cuánto de cada uno debe usarse para elaborar 100 mililitros de solución con una concentración de teofilina de 2 mg/mL?

5. Dos niños tienen radios de comunicación que tienen un alcance máximo de 2 millas. Uno de ellos sale de cierto punto a la 1:00 p.m. y camina al norte a razón de 4 millas/h. El otro sale del mismo punto a la 1:15 p.m. y camina al sur a 6 millas/h. ¿En qué momento no podrán comunicarse entre sí?

6. Un vendedor compró un automóvil que estaba anunciado para promediar 27 millas/galón en la ciudad y 38 millas/galón en carretera. Un reciente viaje de ventas en el que recorrió 1762 millas requirió de 51 galones de gasolina. Suponiendo que las estimaciones anunciadas de rendimiento fueran correctas, ¿cuántas millas recorrió en la ciudad?

7. Con agua de una manguera, una piscina se puede llenar en 8 horas. Si se usa una segunda manguera sola, más grande, la piscina puede llenarse en 5 horas. ¿Cuánto tardaría en llenarse si ambas mangueras se usaran simultáneamente?

8. Una estudiante universitaria ha terminado 48 horas crédito con un promedio de 2,75. Para entrar al programa en el que ella desea estar, debe tener un promedio de 3,2. ¿Cuántas horas crédito adicionales de trabajo de 4,0 subirán su promedio a 3,2?

9. Los arqueólogos pueden determinar la estatura de un ser humano sin tener un esqueleto completo. Si un arqueólogo encuentra sólo un húmero, el hueso entre el hombro y el codo, entonces la estatura del individuo se puede determinar usando una relación lineal sencilla. Para una mujer, si x es la longitud del húmero (en centímetros), entonces su estatura h (en centímetros) se puede determinar usando la fórmula $h = 65 + 3{,}14x$. Para un hombre, debe usarse $h = 73{,}6 + 3{,}0x$.

(a) Se encuentra un esqueleto femenino que tiene un húmero de 30 centímetros. Encuentre la estatura de la mujer cuando murió.
(b) La estatura de una persona disminuirá típicamente 0,06 centímetros por año después de los 30 años. Se encuentra el esqueleto completo de un hombre. El húmero mide 34 centímetros y la estatura del hombre era de 174 centímetros. Determine su edad aproximada cuando murió.

10. Una hoja de papel de 24 por 36 pulgadas se va a usar para un cartel, con el lado más corto en la parte inferior. Los márgenes de los lados y la parte superior van a tener el mismo ancho, y el margen de abajo va a tener el doble de ancho que los otros márgenes. Encuentre el ancho de los márgenes si el área impresa va a ser de 661,5 $pulg^2$.

11. Un agricultor piensa poner una cerca en un lugar rectangular, usando parte de su granero en un lado y cerca para los otros tres lados. Si el lado paralelo al granero va a tener el doble de largo que un lado adyacente, y el área del lugar va a ser de 128 ft^2 , ¿cuántos pies de cerca debe comprar?

12. Una empresa constructora está tratando de decidir cuál de dos modelos de grúa comprar. El modelo A cuesta $ 100.000 y requiere $ 8000 por año para su mantenimiento. El modelo B tiene un costo inicial de $ 80.000 y su mantenimiento cuesta $ 11.000 por año. ¿Durante cuántos años debe usarse el modelo A antes de que sea más económico que B?

13. Un consumidor está tratando de decidir si comprar el auto A o el B. El auto A cuesta $ 20.000 y tiene un rendimiento de combustible de 30 millas por galón y el seguro cuesta $ 1000 por año. El auto B cuesta $ 24.000 y tiene un rendimiento de 50 millas por galón, y el seguro cuesta $ 1200 por año. Suponga que el consumidor recorre 15.000 millas por año y que el precio de la gasolina permanece constante en $ 3 por galón. Con base sólo en estos datos, determine cuánto tiempo tomará para que el costo total del auto B sea menor que el del auto A.

14. La estatura de una persona típicamente disminuirá en 0,024 pulgadas por año después de los 30 años.

(a) Si una mujer medía 5 pies 9 pulgadas cuando tenía 30 años, prediga su estatura a la edad de 70 años. 5 ft 8 n.
(b) Un hombre de 50 años mide 5 pies 6 pulgadas. Determine una desigualdad para el intervalo de sus estaturas (en pulgadas) que este hombre tendrá entre las edades de 30 y 70.

15. Una empresa de bienes raíces posee 218 departamentos en edificios, que están ocupados por completo cuando la renta es $ 940 al mes. La empresa estima que por cada $ 25 de aumento en renta, 5 departamentos se desocuparán. ¿Qué renta debe cobrarse para pagar las facturas mensuales, que totalizan $ 205.920?

Conseideraciones finales

Después de haber desarrollado los problemas matemáticos presentados en este material, el estudiante se puede percatar de que son muchas las funcionalidades que ofrecen las herramientas software utilizadas. El reto en adelante es darles el mejor uso posible en los cursos sucesivos de matemáticas de los planes de estudio en los diferentes programas académicos en la Corporación.

Hoy día las potencialidades que brindan estos recursos de apoyo a la matemática y al cálculo le dan la posibilidad al cuerpo docente de centrar el proceso de enseñanza de las matemáticas más que en los procedimientos para resolver una ecuación. Obviamente, es un proceso importante, pero que es mecánico y que ya lo hacen muy bien estas herramientas, es mejor llevar al estudiante a enfocarse en el planteamiento y formulación de los problemas,las soluciones de los mismos, y en la interpretación de los resultados obtenidos.

Se recomienda a los estudiantes, mantener actualizadas las aplicaciones móviles de estas herramientas ya que periódicamente se hacen mejoras sobre sus funcionalidades, esto a través de las tiendas en línea en las que están ubicadas, que para el caso de sistema operativo Android, es Google Play y para el sistema Apple es la Apple Store.

El profesor tiene el compromiso de diseñar actividades de aprendizaje que involucren el uso de estas herramientas y a su vez se fomente la resolución de problemas. Para ello, es fundamental el dominio que el docente tenga del uso del software. Una primera sesión de trabajo presencial entre profesor y estudiantes se debe centrar en la exploración inicial de las funcionalidades que ofrecen estas herramientas. El docente debe enseñar a los estudiantes a usarlas, al menos específicamente en el campo de conocimiento que se vaya a tratar, que para el caso de este material docente, hace relación al estudio de ecuaciones y principios geométricos.

Se invita a los estudiantes a que realicen los procedimientos y las operaciones algebráicas y gráficas manualmente, y que después corroboren sus resultados con los que arrojan las herramientas software. En el caso de la herramienta Geogebra, es importante resaltar la posibilidad que esta ofrece en el sentido de permitir analizar cualquier objeto matemático desde dos vistas: la algebráica y la geométrica. Además, es un recurso que ayuda a desarrollar en los estudiantes las competencias matemáticas para simular situaciones de la vida real de forma dinámica e interactiva.

Además, se invita a los profesores a hacer uso de Modo Examen Geogebra (https://www.geogebra.org/m/hybx6mzs), una forma sencilla de bloquear o restringir los dispositivos móviles celulares de los estudiantes por un determinado intervalo de tiempo, en el que se desconectan de internet y solamente pueden usar la aplicación (esto obliga a colocar el dispositivo en modo avión, antes de iniciar). Es una herramienta muy útil cuando se desean realizar exámenes, y se quiere evitar que los estudiantes puedan comunicarse entre sí. El profesor puede hacer registro del examen en cualquier momento, y ante la eventualidad de que un estudiante abandone la aplicación antes de finalizar, le avisará. Al final, el profesor da la indicación de abandonar examen accediendo a la opción respectiva en la barra de menú. Funciona además en la versión web tanto para sistema operativo Windows como Mac.

GLOSARIO

· Área: "Es la medida de una superficie y se da en unidades cuadradas. El área se refiere al tamaño. Para realizar esta medida se considera como referencia un cuadrado que tenga por lado la unidad de longitud" (Baldor, 2004, p. 203).

· Ecuación: "Igualdad matemática que contiene una o varias incógnitas inmersas dentro expresiones algebraicas y vinculadas a través de operaciones matemáticas. Las incógnitas son denominadas también variables y junto con las constantes o números, son datos que están incluidos dentro de la ecuación" (RAE, s.f.)

· Geometría: la geometría es una parte de la matemática que se encarga de estudiar las propiedades y las medidas de una figura en un plano o en un espacio. Para representar distintos aspectos de la realidad, la geometría apela a los denominados sistemas formales o axiomáticos (compuestos por símbolos que se unen respetando reglas y que forman cadenas, las cuales también pueden vincularse entre sí) y a nociones como rectas, curvas y puntos, entre otras (Pérez y Merino, 2009a, párr. 1)

· Inecuación: "desigualdad entre dos expresiones algebraicas de una o varias incógnitas, que solo se verifica para ciertos valores de esa incógnita" (Wordreference, s. f.)

· Intervalo: se llama intervalo al conjunto de números reales comprendidos entre dos números a y b que se llaman extremos del intervalo, los cuales pueden ser o no parte de dicho conjunto. Los intervalos son los subconjuntos conexos de R. Más precisamente, son las únicas partes *I* de R que verifican la propiedad siguiente:

Si x e y pertenecen a *I*, con x ≤ y, entonces para todo z tal que x ≤ z ≤ y, z pertenece a*I*.

Se pueden clasificar los intervalos según sus características topológicas (intervalos abiertos, cerrados, semi abiertos, abiertos y cerrados) o según su características métricas (su longitud: nula, finita no nula, o infinita) (Baldor, 2008).

· Perímetro: proviene del latín *perímetros*. Termino conformado por dos partes, en primer lugar el prefijo peri- que significa alrededor, y el vocablo -metros que significa medida. Hace referencia a la medida de una superficie o de una figura y a la medida de ese contorno (Pérez y Merino, 2009c, párr. 1).

· Plano cartesiano: denominado también sistema cartesiano en honor al célebre matemático francés, René Descartes, fundador de la geometría analítica. Conformado por dos rectas que se cruzan o cortan perpendicularmente conformando un sistema de ejes coordenados rectangulares. El punto de cruce se conoce como el origen de coordenadas. En el eje horizontal o eje de las abscisas están ubicados números reales x, mientras que en el eje vertical o eje de las ordenadas están ubicados números reales y. Estos ejes dividen al plano en cuatro partes denominadas cuadrantes. El plano cartesiano es usado para establecer una ubicación de cualquier punto dentro del mismo y para hacer representaciones gráficas de relaciones matemáticas y funciones (Baldor, 2008, p. 291)

· Teorema de Pitágoras: “En todo triangulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos, comprobado en el siglo VI a. de C. por el filósofo y matemático griego Pitágoras” (Baldor, 2004, p. 56).

· Variable: del término en latín *variabilis*, variable es una palabra que representa a aquello que varía o que está sujeto a algún tipo de cambio. una variable es un símbolo que permite identificar a un elemento no especificado dentro de un determinado grupo. Las variables son elementos presentes en fórmulas, proposiciones y algoritmos, las cuales pueden ser sustituidas o pueden adquirir sin dejar de pertenecer a un mismo universo, diversos valores (Pérez y Merino, 2009b, párr. 1).

· Volumen: es “la medida del espacio limitado por un cuerpo. Para medir el volumen de un cuerpo se toma como unidad un cubo de arista igual a la unidad de longitud. En el sistema métrico decimal, es el metro cúbico” (Baldor, 2004, p. 262).

REFERENCIAS

Ascheri, M.E., Testa, O.,Pizarro, R., Camiletti, P., Díaz, L. y Di Martino, S. (2015, 28 al 30 de octubre). Desarrollo de aplicaciones para la enseñanza de la matemática con dispositivos móviles [conferencia]. *IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, Ensenada, Argentina,* La Plata, Argentina. http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.8045/ev.8045.pdf

Ávila, J., y Ávila, R. (2017). Desarrollo de competencia para usar diversas aplicaciones de software para la resolución de problemas en los cursos de matemáticas. En Serna, Luis Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1612-1620). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ávila, M., Chourio, E., Casadei, L. y Alvarez, Z. (2008). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. *Actualidades educativas en educación,* 7(2), 1-34. https://www.redalyc.org/pdf/447/44770209.pdf

Ayllón, M., Gómez, I. y Ballesta J. (2016). Pensamiento Matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos,» *Propósitos y representaciones*, 4(1), 169-218. DOI:10.20511/pyr2016.v4n1.89

Baldor, A. (2004). Geometría plana y del espacio con introducción a la trigonometría (vigésima reimpresión).Publicaciones Cultural.

Baldor, A. (2005). *Algebra Baldor.* Publicaciones Cultural.

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista Educación, 32*(1), 123-138. https://doaj.org/article/76e245ebdb254f42975d30c18ee9db9e

Corporación Universitaria Comfacauca [Unicomfacauca].(2014).*Proyecto educativo institucional, PEI.* Unicomfacauca. https://www.unicomfacauca.edu.co/wp-content/uploads/PEI-Corporacion-Universitaria-Comfacauca_Unicomfacauca_2014.pdf

Del Río, Laura Sombra & Búcari, Néstor & Sanz, Cecilia. (2016, 6 -9 de septiembre). Uso de recursos hipermediales para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática [conferencia]. *Segundo congreso internacional de enseñanza de las ciencias y la matemática,* Buenos Aires, Argentina. http://funes.uniandes.edu.co/21025/1/delRio2016Uso.pdf

Garcia, J. (2010). Aplicación de la estrategia de resolución de problemas en la enseñanza de Física, Química y Matemáticas. *Hallazgos, revista de investigaciones,* 7, 129-148. https://doi.org/10.15332/s1794-3841.2010.0014.06

Geogebra Team German y Equipo de traducción. (s. f.). *Tutorial: geogebra exámen*. Geogebra. https://www.geogebra.org/m/hybx6mzs

Geogebra. (s. f.). *GeoGebra para enseñar y aprender Matemáticas.* https://www.geogebra.org/

Gil,R. (2018). El uso del aprendizaje basado en problemas en la enseñanza universitaria. Análisis de las competencias adquiridas y su impacto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 23*(76), 73-93. https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/87806/1405-6666-rmie-23-76-73.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Gonzáles Martel, C., Dávila Cardenes N. y Gómez Deniz, E. (2018, 15-16 de noviembre). Wolfram Alpha, una herramienta informática con múltiples aplicaciones en la educación universitaria [conferencia]. *V Jornadas Iberoamericanas de Innovación Educativa en el ámbito de las TIC y las TAC,* Las Palmas de Gran Canaria, España. https://accedacris.ulpgc.es/handle/10553/52706

Guerrero, E. (2004). La estructuración del contenido matemático por problemas: un mecanismo para alcanzar un conocimiento efectivo en educación superior. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 6*(2), 1-12. http://redie.uabc.mx/vol6no2/contenido-guerrero.html

Herrera-Lara, R. (2013). Herramientas de Software Libre para Aplicaciones en Ciencias e Ingeniería. Revista Politécnica - *EPN Journal. 32*(1), 1-8. DOI 10.33333/rp.vol32n0.30.

Mallartz, A. (2014). La resolución de problemas en la prueba de Matemáticas de acceso a la universidad: procesos y errores. *Educatio Siglo XXI, 32*(2), 233-254.https://doi.org/10.6018/j/194171

Monroy, J. (2014). La resolución de problemas matemáticos y su impacto en el pensamiento crítico del ciudadano. *Revista de Educación, cooperación y bienestar social, 3*, 79-85. https://www.revistadecooperacion.com/numero3/03-06.pdf

Morales Saavedra, S. (2014). Perfeccionamiento docente virtual: Una experiencia con tutores/as. *Perfiles educativos, 36*(143), 180-194. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982014000100011&lng=es&tlng=es.

Moreno Martínez, N. (2017). Una representación gráfica de la práctica de resolución de problemas en cálculo diferencial. *Investigación en la Escuela, 92*, 60-75. http://www.investigacionenlaescuela.es/articulos/R92/R92-5

Oliver, E. B. V., Serrano, M. d. C. C., Hernández, P. A. Q., Guerrero, C. A. T., y Ojeda, E. R. (2017). El impacto del uso de software geogebra en la enseñanza del cálculo diferencial en dos institutos tecnológicos. *Pistas educativas, 39*(126), 352-368. http://itcelaya.edu.mx/ojs/index.php/pistas/article/view/1045/866

Orozco M. y Caballero K. (2014). *Psicología latinoamericana: experiencias, desafíos y compromisos sociales.* Asociación Mexicana de Alternativas en Psicología, A. C. https://www.alfepsi.org/wp-content/uploads/2014/10/LIBRO-Psicologia-Latinoamericana-Experiencias-desafios-y-compromisos-sociales.pdf

Pérez, J. y Merino, M. (2009a). *Definición de geometría*. Definición. https://definicion.de/geometria/

Pérez, J. y Merino, M. (2009b). *Definición de variable*. Definición. https://definicion.de/variable/

Pérez, J. y Merino, M. (2009c). *Definición de perimetro.* Definición. https://definicion.de/perimetro/

Real Academia de la Lengua Española [RAE]. (s. f.). *Diccionario de la lengua española*, 23.ª ed., [versión 23.5 en línea]. https://dle.rae.es

Ruiz, E. Hernández, J., y Gutiérrez, J.(2015). Aplicaciones en dispositivos móviles enfocadas al estudio de conceptos de cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza, 6*, 123-144. http://funes.uniandes.edu.co/14936/

Santos, L. (2016). La resolución de problemas matemáticos y el uso coordinado de las tecnologías digitales. *Cuadernos de investigación y formación en investigación*, 11,(15), 333-346. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23952/24108

Steward, J.,Redlin L. y Watson, S. (2012). *Precálculo, matemáticas para el cálculo,* (5ta ed.). Cengage Learning Editores.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Algebra y trigonometría con geometría analítica*. Cengage Learning Editores.

Symbolab (s. f.). *What we do*. Symbolab. https://es.symbolab.com/about

Vásconez Barrera, P. E. & Varguillas Carmon, C. S.(2020). Estrategias educativas para desarrollar innovación pedagógica basada en TIC de los docentes de bachillerato. *Pro Sciences: Revista De Producción, Ciencias E Investigación, 4*(37), 50–60. https://doi.org/10.29018/issn.2588-1000vol4iss37.2020pp50-60

World Reference. (s. f.). *Inecuación*. https://www.wordreference.com/definicion/inecuaci%C3%B3n

Zill, D. y Deward, J.(2000). *Algebra y trigonometría.* McGraw-Hill.

Semillero de investigación
EDCiBa

Semillero EDCiBa

La presente obra escrita está dirigida a estudiantes de primer semestre que entran a cursar la asignatura de Matemáticas Fundamentales. En este documento se describe la forma de solucionar ejercicios orientados fundamentalmente a la resolución de problemas, haciendo uso de los software matemáticos Geogebra y Symbolab. Con este material se pretende que el estudiante conozca y apropie estas herramientas para que complemente su formación en el tiempo de trabajo independiente (extra clase) y se ejercite al comprobar algebraica y gráficamente los ejercicios de Matemáticas fundamentales, una asignatura base en el proceso de formación académica de los futuros profesionales.